

КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Кваліфікаційна наукова праця
на правах рукопису

ВОЛОВЕЦЬКИЙ ОЛЕКСАНДР ОСТАПОВИЧ

УДК 681.5:622.7:004.8

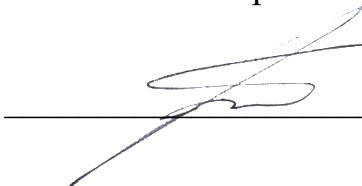
ДИСЕРТАЦІЯ

**Прогнозуюче керування нелінійним процесом магнітної сепарації на
основі ядерних функцій**

151 – Автоматизація та комп'ютерно інтегровані технології

15 Автоматизація та приладобудування

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей, результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело


_____ О.О. Воловецький

Науковий керівник – Тронь Віталій Валерійович, кандидат технічних наук,
доцент

Кривий Ріг – 2026

АНОТАЦІЯ

Воловецький О. О. Прогнозуюче керування нелінійним процесом магнітної сепарації на основі ядерних функцій. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора філософії за спеціальністю 151 «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології». – Криворізький національний університет МОН України, Кривий Ріг, 2026.

Представлена робота присвячена вирішенню актуальної науково-технічної задачі підвищення якості керування процесом магнітної сепарації залізорудної сировини на гірничо-збагачувальних комбінатах Криворізького басейну за рахунок розроблення методології побудови інтегрованої предиктивної системи керування на основі ядерних функцій (К-MPC), що забезпечує узгоджене багатовимірне керування нелінійним об'єктом з явним дотриманням технологічних обмежень та адаптацію до стохастичної мінливості параметрів сировини.

Метою виконаних досліджень є розроблення методології побудови інтегрованої предиктивної системи керування процесом магнітної сепарації, що забезпечує узгоджене багатовимірне керування нелінійним об'єктом з явним дотриманням технологічних обмежень та адаптацію до стохастичної мінливості параметрів сировини на гірничо-збагачувальних комбінатах Криворізького басейну.

Об'єктом дослідження є процес керування магнітною сепарацією залізорудної сировини в умовах нестационарності технологічних параметрів та варіабельності мінералогічного складу.

Предмет дослідження — методи побудови нелінійних прогнозних моделей на основі ядерних функцій та алгоритми предиктивного керування багатовимірними технологічними процесами збагачення з урахуванням технологічних обмежень.

При виконанні досліджень враховано наявність системного протиріччя між трьома вимогами до прогнозної моделі у контурі предиктивного керування процесом магнітної сепарації: нелінійною адекватністю (R1), обчислювальною ефективністю (R2) та інтерпретованістю параметрів (R3). Порівняльний аналіз шести класів математичних моделей засвідчив, що в межах розглянутих підходів одночасне повне задоволення зазначених вимог не досягається. За таких умов розроблено комплекс науково-технічних рішень на основі ядерної гребеневої регресії з RBF-ядром, що дозволяє подолати вказане протиріччя і забезпечити обчислювальну реалізованість алгоритму у промислових умовах.

У *першому розділі* виконано системний аналіз процесу магнітної сепарації на барабанному сепараторі ПБМ-90/250 як об'єкта автоматичного керування. Об'єкт схарактеризовано як нелінійну МІМО-систему з трьома входами (магнітна індукція B , густина пульпи ρ , витрата живлення Q) та двома виходами (вміст заліза у концентраті β_{Fe} , коефіцієнт вилучення ϵ), що характеризується транспортним запізненням 120–180 с та параметричною нестаціонарністю з характерними часами від годин до місяців. Систематизовано вітчизняний і світовий досвід автоматизації збагачувальних процесів. Проведено порівняльний аналіз шести класів математичних моделей — фізико-механічних, регресійних, динамічних лінеаризованих, ядер Вольтерра, нейронних мереж та нейро-нечітких моделей, узагальнення результатів якого дало підстави виявити наявність системного протиріччя між вимогами R1, R2 та R3. Встановлено, що методи

ядерної регресії є найбільш перспективним класом для побудови прогнозної моделі, оскільки KRR із RBF-ядром поєднує обчислювальну складність прогнозу $O(n)$ із замкненою формою градієнта. На цій основі сформульовано мету дослідження та чотири основні задачі, спрямовані на її досягнення.

У другому розділі побудовано цілісну систему ідентифікації та предиктивного керування процесом магнітної сепарації на основі методів ядерної регресії у відтворюваному ядерному гільбертовому просторі (RKHS). Введено критерій аналітичного градієнта R4 як системоутворюючу вимогу до прогнозної моделі та обґрунтовано, що KRR з RBF-ядром є єдиним серед розглянутих методом, який задовольняє одночасно всім чотирьом критеріям R1–R4. Отримано замкнений аналітичний вираз для градієнта прогнозної функції KRR, що забезпечує шестикратне прискорення порівняно з числовим диференціюванням та гарантує строгу опуклість QP-задачі в контурі K-MPC. На основі побудованої KRR-моделі синтезовано алгоритм K-MPC з технологічно обґрунтованою структурою матриць вагових коефіцієнтів Q та R за принципом *inverse-range scaling*. Встановлено, що матриця $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u^2 \max)$, обрана за технологічним принципом, одночасно є механізмом самозабезпечення прийнятності лінеаризації, що усуває необхідність зовнішнього механізму *trust region*. Запропоновано трирівневу адаптивну архітектуру $SVR \rightarrow KRR \rightarrow GP$, об'єднану через спільний RKHS, в якій кожному методу призначено функціональну роль: SVR — фільтр аномалій, KRR — прогнозна модель, GP — наглядач невизначеності. Стратегія адаптивного консервативного керування через автоматичне збільшення матриці $R(k)$ пропорційно апостеріорній дисперсії GP-наглядача забезпечує коректну реакцію системи при виході за межі

навчального домену. Повна адаптивна архітектура покращує точність ідентифікації у 36,3 рази відносно статичної моделі при зміні типу руди.

У *третьому розділі* здійснено формальне обґрунтування коректності, стійкості та ефективності синтезованої системи К-МРС. Побудовано модель простору стану на основі lifting-оператора, що зводить задачу предиктивного керування з нелінійною ядерною моделлю до опуклої QR-задачі, розв'язуваної методом active-set з теплим стартом. Сформульовано достатні умови асимптотичної стійкості системи К-МРС на основі класичної схеми доведення стійкості МРС через функцію Ляпунова, спеціалізованої для архітектури з ядерним предиктором. Двомеханізмний коридор стійкості — локальне самозабезпечення прийнятності лінеаризації та термінальний член — забезпечує монотонне спадання функції Ляпунова з показником збіжності $\lambda_{\max} \approx 0,819$ та постійною часу $\tau \approx 7,78$ кроків. Стрес-тестування підтвердило збереження умов стійкості при варіації ширини ядра у діапазоні ± 30 %. Незалежна верифікація підтвердила коректність ключових компонент системи: аналітичний градієнт KRR верифіковано з похибкою менше 10^{-6} відносно числового еталону, а статистична валідація GP-предиктора засвідчила покриття 95 %-го довірчого інтервалу на рівні 93–97 %. Колінеарний порівняльний аналіз на 30 запусках за шістьма методами керування у трьох сценаріях кількісно підтвердив, що К-МРС досягає якості керування на рівні NMPC при 17–70-кратному зменшенні часу обчислення та забезпечує дворазове покращення точності відносно ПД-регулятора, при цьому перевага зростає до 3–4 разів в умовах нестационарності процесу.

У *четвертому розділі* реалізовано програмне забезпечення системи К-МРС у вигляді модульної чотирирівневої архітектури (PlantDynamics, KernelModel, MPCController, AdaptiveIdentifier), параметризованої за даними п'яти ГЗК Криворізького басейну для трьох типів руди —

магнетитових, змішаних магнетит-кварцитових та кварцитових. Побудовано колінеарну верифікаційну MiL-платформу за ІЕС 62381 з трьома режимами на єдиній моделі технологічного процесу, що забезпечує методологічну коректність як ідентифікації, так і порівняльного аналізу алгоритмів керування. Верифікаційні випробування підтвердили відповідність теоретичним результатам розділів 2–3: К-МРС забезпечує RMSE по β_{Fe} на рівні 0,5–0,7 %, що у 2–3 рази менше за ПІД-регулятор; адаптивна KRR з ковзним вікном покращує точність ідентифікації у 15–20 разів порівняно зі статичною моделлю при тривалому дрейфі параметрів; SVR-фільтр аномалій знижує RMSE у 8,2 рази. Повний End-to-End час циклу не перевищує $t_{p95} \approx 3,02$ мс при такті дискретизації 60 с, що забезпечує запас реального часу приблизно у 20 000 разів. Розроблено чотирифазний план промислового впровадження (Offline-ідентифікація, Shadow Mode, Advisory Mode, Closed Loop) з кількісними критеріями переходу між фазами. Розроблено узагальнену функціональну схему підключення сепаратора ПБМ-90/250 до контуру К-МРС типовими засобами збагачувальної секції, у якій автоматичному керуванню з тактом $T_s = 60$ с підлягають лише густина пульпи ρ та об'ємна витрата Q , тоді як магнітну індукцію B — з огляду на її формування постійними магнітами без електричного регулювання — віднесено до квазістатичних параметрів режиму з ручним (рекомендаційним) налаштуванням оператором; триканальний формалізм та ядерну модель $f(B, \rho, Q) \rightarrow (\beta_{Fe}, \epsilon)$ при цьому збережено повністю. Безпеку керуючих впливів забезпечено механізмом обмеженого авторитету (Limited Authority Control) з подвійним захистом — на рівні QR-обмежень контролера та апаратно на рівні ПЛК, що гарантує автоматичне повернення до ПІД-режиму при збоях АРС-рівня.

Наукова новизна одержаних результатів полягає у такому. Уперше для задачі предиктивного керування процесом магнітної сепарації

обґрунтовано критерій вибору ядерної прогновної моделі — введенням вимоги наявності замкненого аналітично обчислюваного градієнта на додаток до нелінійної адекватності, обчислювальної ефективності та інтерпретованості, — що дозволило виділити KRR з RBF-ядром як єдину з розглянутих моделей, придатну для К-МРС, та забезпечило шестикратне прискорення обчислення градієнта порівняно з числовим диференціюванням і гарантовану строгу опуклість QP-задачі. Уперше для К-МРС з ядерною RBF-моделлю у задачі керування магнітною сепарацією встановлено достатню умову прийнятності локальної лінеаризації — доведенням, що матриця штрафних ваг $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u^2_{\max})$ утримує відносний крок керування у припустимих межах, — що дозволило обмежити похибку лінеаризації на рівні $\epsilon_{\text{lin}} \approx 0,11\text{--}0,28\%$ (проти допустимого $\delta_{\max} = 5\%$) без зовнішнього механізму trust region, із використанням лише 15–24 % допустимого діапазону приростів. Набув подальшого розвитку підхід до адаптивної ідентифікації процесу магнітної сепарації — поєднанням SVR, KRR і GP у єдиній архітектурі зі спільним ядром та функціональним розподілом ролей (фільтрація аномалій, прогнозування, оцінювання невизначеності), — що, на відміну від відомих однорівневих схем, дозволило підвищити точність ідентифікації у 36,3 рази при зміні типу руди та у 15–20 разів при повільному дрейфі параметрів відносно статичної моделі. Набув подальшого розвитку метод доведення асимптотичної стійкості систем предиктивного керування — спеціалізацією для К-МРС з нелінійною ядерною моделлю через формулювання достатніх умов на точність моделі, вагові коефіцієнти регулятора та термінальний член, — що дозволило формально гарантувати монотонне спадання функції Ляпунова з показником збіжності $\lambda_{\max} \approx 0,819 < 1$ та підтвердити збереження стійкості при варіації ширини ядра у діапазоні $\pm 30\%$. Уперше у задачі предиктивного керування процесом

магнітної сепарації запропоновано стратегію адаптивного консервативного коригування параметрів К-МРС за оцінкою апостеріорної невизначеності GP, що активується при виході робочої точки об'єкта за межі навчального домену, — реалізовану збільшенням матриці штрафних ваг $R(k)$ пропорційно дисперсії σ^2_{GP} , — що дозволило при виході за межі домену знизити RMSE ідентифікації з 0,3–0,5 (архітектура без GP-наглядача) до 0,22 нормалізованих одиниць та скоротити час відновлення з 6–9 до 5–8 тактів.

Практичне значення одержаних результатів полягає у створенні комплексу алгоритмічних та програмних засобів предиктивного керування процесом магнітної сепарації, придатного для промислового впровадження на гірничо-збагачувальних комбінатах Криворізького басейну. Результати дисертаційного дослідження використовуються у навчальному процесі Криворізького національного університету при підготовці здобувачів другого (освітньо-наукового) рівня вищої освіти за освітньо-науковою програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» спеціальності G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка», що підтверджується довідкою про використання результатів дисертаційної роботи. За результатами роботи розроблено три методики — побудови нелінійної прогностичної моделі процесу магнітної сепарації на основі ядерної регресії з аналітично обчислюваним градієнтом, налаштування матриці штрафних ваг предиктивного регулятора за умовою самозабезпечення коректності лінеаризації та адаптивної ідентифікації процесу на основі трирівневої архітектури з ядерними функціями, — які передано до ПРАТ «Північний гірничо-збагачувальний комбінат» (м. Кривий Ріг), де їх прийнято до використання та заплановано до застосування при розробці алгоритмічного і програмного забезпечення системи предиктивного керування барабанными магнітними сепараторами,

що підтверджується відповідною довідкою. Основні результати дисертаційної роботи розглянуто фахівцями зазначеного підприємства, які підтвердили практичну значущість запропонованих підходів та можливість їх урахування у подальших роботах із вдосконалення керування процесами збагачення мінеральної сировини, що підтверджується відповідним актом.

Ключові слова: математичне моделювання нелінійних процесів, моделювання, оптимізація, магнітна сепарація, предиктивне керування, ядерна гребенева регресія, RBF-ядро, К-МРС, асимптотична стійкість, адаптивна ідентифікація, гаусівський процес, гірничо-збагачувальний комбінат, залізна руда, автоматизація технологічних процесів.

Список публікацій здобувача.

Основні положення та результати дисертації опубліковано в таких працях:

Статті в наукових періодичних виданнях інших держав або України, які включені в міжнародні наукометричні бази:

1. Volovetskyi O. O. Utilizing Gaussian Process Regression for Nonlinear Magnetic Separation Process Identification. *Informatyka, Automatyka, Pomiar w Gospodarce i Ochronie Środowiska (IAPGOS)*. 2024. Vol. 14, No. 3. P. 21–28. DOI: 10.35784/iapgos.5954. (Входить до переліку міжнародної наукометричної бази Scopus).

2. Volovetskyi O. O. Methods of Filtering and Regression for Forecasting Noisy Timeseries Based on Machine Learning. *Herald of Advanced Information Technology*. 2025. Vol. 8, No. 1. P. 13–27. DOI: 10.15276/hait.08.2025.1. (Входить до переліку міжнародної наукометричної бази Scopus).

Статті в наукових фахових виданнях України:

3. Volovetskyi O. Comprehensive methodology for creating enhanced datasets for modelling the process of magnetic separation of iron ore. *Journal of*

Kryvyi Rih National University. 2024. Vol. 22, No. 2. P. 10–27. DOI: 10.31721/2306-5451-2024-2-22-10-27.

4. Volovetskyi O. O. Development and Research of a Synthetic Data Generator for Modeling Technological Parameters of the Iron Ore Beneficiation Process. *Вчені записки Таврійського національного університету імені В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки*. 2025. Т. 36, № 2. С. 49–54. DOI: 10.32782/2663-5941/2025.2.2/07.

5. Volovetskyi O. Local Linearization of Kernel Models in Real Time as a Basis for Fast Optimization in MPC. *Automation of Technological and Business Processes*. 2025. Vol. 17, No. 4. P. 98–103. DOI: 10.15673/atbp.v17i4.3319.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації:

6. Воловецький О. О. Використання ядерних методів при керуванні процесами збагачення. *Розвиток промисловості та суспільства: матеріали міжнародної науково-технічної конференції* (м. Кривий Ріг, 2023). Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2023. С. 231.

7. Воловецький О. О., Тронь В. В. Предиктивне керування з урахуванням нелінійності в збагаченні руд. *Комп'ютерні інтелектуальні системи та мережі: матеріали XVII Всеукраїнської науково-практичної WEB-конференції аспірантів, студентів та молодих вчених* (м. Кривий Ріг, 2024). Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2024. С. 240–242.

8. Воловецький О. О., Тронь В. В. Вибір методу регресії для моделювання динамічних систем: SVR vs GPR. *XIV Всеукраїнська конференція «Молоді вчені 2024 – від теорії до практики»* (м. Дніпро, 2024). Дніпро: Інститут промислових та бізнес-технологій УДУНТ, 2024. С. 135–141.

9. Воловецький О. Адаптивний метод фільтрації зашумлених даних у системах магнітної сепарації з використанням логарифмічної залежності

ширини вікна. *Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної on-line конференції «Проблеми енергоефективності та автоматизації в промисловості та сільському господарстві»* (м. Кропивницький, 2024). Кропивницький: Центральноукраїнський національний технічний університет, 2024. С. 191–193.

10. Воловецький О. О., Тронь В. В. Оптимізація алгоритмів SVR для швидкого прогнозування параметрів збагачення залізної руди з використанням обмеженого обсягу даних. *Комп'ютерні інтелектуальні системи та мережі: матеріали XVIII Всеукраїнської науково-практичної WEB-конференції аспірантів, студентів та молодих вчених* (м. Кривий Ріг, 2025). Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2025. С. 286–289.

11. Воловецький О. О. Ефективність ядерного предиктивного керування процесом збагачення залізних руд: порівняльний аналіз. *Development of Education, Science and Business: Results 2025: Proceedings of the International Scientific and Practical Internet Conference* (Dnipro, Ukraine, 2025). Dnipro: FOP Marenichenko V. V., 2025. P. 153–154.

12. Воловецький О. О. Стабільність та робастність ядерного предиктивного керування процесом магнітної сепарації. *Матеріали XVIII міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології і автоматизація – 2025»* (м. Одеса, 2025). Одеса, 2025. С. 384–387.

13. Воловецький О. О. Процес переходу від статичної до динамічної системи магнітної сепарації. *Розвиток промисловості та суспільства: матеріали міжнародної науково-технічної конференції* (м. Кривий Ріг, 2025). Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2025. С. 336.

14. Воловецький О. О., Тронь В. В. Реалізація швидкого предиктивного керування (К-МРС) для складних промислових об'єктів в умовах цифрової трансформації. *Виклики майбутнього: трансформації,*

стратегії адаптації та стійкість у міждисциплінарному вимірі: збірник тез Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених (м. Чернігів, 2025). Чернігів: ЗВО «Університет трансформації майбутнього», 2025. С. 199–201.

15. Volovetskyi O. Kernel-Based Predictive Control of Nonlinear Magnetic Separation Processes. *Матеріали конференцій МЦНД* (м. Суми, 2025). Суми: МЦНД, 2025. С. 212–217. DOI: 10.62731/mcnd-10.10.2025.002.

16. Воловецький О. О., Тронь В. В. Діагностика числової деградації Kernel-MPC при збільшенні горизонту прогнозування. *Комп'ютерні інтелектуальні системи та мережі: матеріали XIX Всеукраїнської науково-практичної WEB-конференції аспірантів, студентів та молодих вчених* (м. Кривий Ріг, 2026). Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2026. С. 306–308.

17. Воловецький О. О., Тронь В. В. Критерій вибору ядерної моделі для прогнозуючого керування на основі властивостей аналітичного градієнта. *XVI Всеукраїнська конференція «Молоді вчені 2026 – від теорії до практики»* (м. Дніпро, 2026). Дніпро: УДУНТ, ННІ Дніпровський металургійний інститут, 2026. С. 353–358.

18. Воловецький О. О., Тронь В. В. Протокольна модель забезпечення відтворюваності досліджень автоматизованих систем керування технологічними процесами. *Інформаційні технології: теорія і практика: матеріали III (IX) Міжнародної науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених* (Харків–Запоріжжя–Дніпро, 25–27 березня 2026 р.). Дніпро: Свідлер А. Л., 2026. С. 588–591.

ABSTRACT

Volovetskyi O. O. Predictive Control of a Nonlinear Magnetic Separation Process Based on Kernel Functions. — Qualifying scientific work in manuscript form.

Dissertation for the degree of Doctor of Philosophy, specialty 151 "Automation and Computer-Integrated Technologies." — Kryvyi Rih National University, Ministry of Education and Science of Ukraine, Kryvyi Rih, 2026.

The present work addresses the scientific and engineering problem of improving the quality of control over the iron ore magnetic separation process at the mining and processing plants of the Kryvyi Rih basin, through the development of a methodology for constructing an integrated kernel-based predictive control system (K-MPC), providing coordinated multivariable control of a nonlinear plant with explicit satisfaction of technological constraints and adaptation to stochastic variability of raw material parameters.

Research objective: to develop a methodology for constructing an integrated predictive control system for the magnetic separation process that ensures coordinated multivariable control of a nonlinear plant with explicit enforcement of technological constraints and adaptation to stochastic parameter variability at mining and processing plants of the Kryvyi Rih basin.

Object of research: the process of controlling iron ore magnetic separation under conditions of non-stationary technological parameters and variable mineralogical composition.

Subject of research: methods for constructing nonlinear predictive models based on kernel functions and predictive control algorithms for multivariable beneficiation processes subject to technological constraints.

The research acknowledges a systemic contradiction among three requirements for the predictive model in the K-MPC loop: nonlinear adequacy (R1), computational efficiency (R2), and parameter interpretability (R3). A comparative analysis of six classes of mathematical models showed that simultaneous complete satisfaction of these requirements is not achievable within the considered approaches. Under these conditions, a set of scientific and technical solutions based on Kernel Ridge Regression with an RBF kernel was developed, resolving the contradiction and ensuring computational feasibility in industrial conditions.

Chapter 1 presents a systematic analysis of the magnetic separation process on a PBM-90/250 drum separator as an automatic control object. The plant is characterized as a nonlinear MIMO system with three inputs (magnetic flux density B , pulp density ρ , feed flow rate Q) and two outputs (iron content in concentrate β_{Fe} , extraction coefficient ϵ), with a transport delay of 120–180 s and parametric non-stationarity with characteristic times ranging from hours to months. Domestic and international experience in beneficiation process automation is systematized. A comparative analysis of six model classes — physico-mechanical, regression, dynamic linearized, Volterra kernels, neural networks, and neuro-fuzzy models — revealed the systemic contradiction among R1, R2, and R3. Kernel regression methods were identified as the most promising class for building the predictive model, since KRR with an RBF kernel combines $O(n)$ prediction complexity with a closed-form gradient. On this basis, the research objective and four main tasks were formulated.

Chapter 2 constructs a complete identification and predictive control system for the magnetic separation process based on kernel regression methods in a Reproducing Kernel Hilbert Space (RKHS). The analytical gradient criterion R4 is introduced as a system-forming requirement for the predictive model, and it is shown that KRR with an RBF kernel is the only method among those

considered that simultaneously satisfies all four criteria R1–R4. A closed-form analytical expression for the gradient of the KRR prediction function is derived, providing a sixfold speedup over numerical differentiation and guaranteeing strict convexity of the QP problem in the K-MPC loop. A K-MPC algorithm is synthesized with a technologically justified weighting matrix structure Q and R via inverse-range scaling. It is established that the matrix $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u_{\max}^2)$, chosen on technological grounds, simultaneously acts as a self-enforcement mechanism for linearization validity, eliminating the need for an external trust region. A three-level adaptive architecture $\text{SVR} \rightarrow \text{KRR} \rightarrow \text{GP}$, unified through a shared RKHS, is proposed, with each method assigned a functional role: SVR as anomaly filter, KRR as predictive model, GP as uncertainty supervisor. The adaptive conservative control strategy — via automatic increase of $R(k)$ proportional to the GP posterior variance — provides correct system response when the plant moves beyond the training domain. The full adaptive architecture improves identification accuracy by $36.3\times$ relative to the static model under ore type changes.

Chapter 3 provides formal justification of the correctness, stability, and efficiency of the synthesized K-MPC system. A state-space model is constructed using a lifting operator, reducing the predictive control problem with a nonlinear kernel model to a convex QP problem solved by the active-set method with warm start. Sufficient conditions for asymptotic stability of the K-MPC system are formulated, based on the classical Lyapunov-based MPC stability proof scheme specialized for the kernel predictor architecture. A dual-mechanism stability corridor — local self-enforcement of linearization validity and the terminal term — ensures monotone decrease of the Lyapunov function with convergence rate $\lambda_{\max} \approx 0.819$ and time constant $\tau \approx 7.78$ steps. Stress testing confirmed that stability conditions are preserved under kernel width variation of $\pm 30\%$. Independent verification confirmed the correctness of key system components:

the analytical KRR gradient was verified with an error below 10^{-6} relative to the numerical reference, and statistical validation of the GP predictor showed 95% confidence interval coverage of 93–97%. A collinear comparative analysis over 30 runs across six control methods in three scenarios quantitatively confirmed that K-MPC achieves control quality comparable to NMPC with a 17–70× reduction in computation time, and provides a twofold improvement in accuracy over PID, with the advantage growing to 3–4× under process non-stationarity.

Chapter 4 implements the K-MPC software system as a modular four-level architecture (PlantDynamics, KernelModel, MPCController, AdaptiveIdentifier), parameterized using data from five Kryvyi Rih basin mining plants for three ore types — magnetite, mixed magnetite-quartzite, and quartzite. A collinear MiL verification platform per IEC 62381 is built with three modes on a single process model, ensuring methodological correctness for both identification and comparative algorithm analysis. Verification tests confirmed agreement with the theoretical results of Chapters 2–3: K-MPC achieves RMSE in β_{Fe} of 0.5–0.7%, which is 2–3× lower than PID; adaptive KRR with a sliding window improves identification accuracy by 15–20× compared to the static model under prolonged parameter drift; the SVR anomaly filter reduces RMSE by 8.2×. The full end-to-end cycle time does not exceed $t_{p95} \approx 3.02$ ms at a 60 s sampling period, providing a real-time margin of approximately 20,000×. A four-phase industrial deployment plan is developed (Offline Identification, Shadow Mode, Advisory Mode, Closed Loop) with quantitative phase transition criteria. A generalized functional connection scheme for integrating the PBM-90/250 separator into the K-MPC loop using standard beneficiation-section equipment is developed, in which only pulp density ρ and volumetric flow rate Q are subject to automatic control with a sampling period $T_s = 60$ s, whereas the magnetic flux density B — owing to its generation by permanent magnets without electrical regulation — is treated as a quasi-static regime parameter with manual (advisory) setting by the

operator; the three-channel formalism and the kernel model $f(B, \rho, Q) \rightarrow (\beta Fe, \varepsilon)$ are thereby fully preserved. Safety of control actions is provided by a Limited Authority Control mechanism with dual protection — at the QP constraint level and hardware PLC level — guaranteeing automatic fallback to PID mode upon APC-level failures.

Scientific novelty. For the first time, for the task of predictive control of the magnetic separation process, a criterion for selecting a kernel predictive model is justified — by introducing the requirement for a closed-form analytically computable gradient in addition to nonlinear adequacy, computational efficiency, and interpretability — which enabled identification of KRR with an RBF kernel as the only model among those considered suitable for K-MPC, and provided a sixfold acceleration of gradient computation compared to numerical differentiation and guaranteed strict convexity of the QP problem. For the first time, for K-MPC with a kernel RBF model in the magnetic separation control task, a sufficient condition for the validity of local linearization is established — by proving that the penalty weight matrix $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u^2_{\max})$ constrains the relative control increment within admissible bounds — which limited the linearization error to $e_{\text{lin}} \approx 0.11\text{--}0.28\%$ (against the admissible $\delta_{\max} = 5\%$) without an external trust region mechanism, using only 15–24% of the admissible increment range. Further developed is the approach to adaptive identification of the magnetic separation process — by combining SVR, KRR, and GP in a unified architecture with a shared kernel and functional role assignment (anomaly filtering, prediction, uncertainty estimation) — which, unlike known single-level schemes, improved identification accuracy by 36.3 times upon ore type change and by 15–20 times under slow parameter drift relative to the static model. Further developed is the method of proving asymptotic stability of predictive control systems — by specialization for K-MPC with a nonlinear kernel model through formulation of sufficient conditions on

model accuracy, controller weights, and the terminal term — which formally guaranteed monotonic decrease of the Lyapunov function with convergence rate $\lambda_{\max} \approx 0.819 < 1$ and confirmed stability preservation under kernel width variation of $\pm 30\%$. For the first time, in the task of predictive control of the magnetic separation process, an adaptive conservative strategy for adjusting K-MPC parameters based on the GP posterior uncertainty estimate is proposed, activated when the plant operating point moves beyond the model's training domain — implemented by increasing the penalty weight matrix $R(k)$ proportionally to the variance σ^2_{GP} — which, upon moving beyond the domain, reduced the identification RMSE from 0.3–0.5 (architecture without the GP supervisor) to 0.22 normalized units and shortened recovery time from 6–9 to 5–8 steps.

Practical significance consists in the creation of a set of algorithmic and software tools for predictive control of the magnetic separation process, suitable for industrial deployment at mining and processing plants of the Kryvyi Rih basin. The results of the dissertation research are used in the educational process of Kryvyi Rih National University in the training of applicants for the second (educational and scientific) level of higher education under the educational and scientific program "Automation and Computer-Integrated Technologies" of specialty G7 "Automation, Computer-Integrated Technologies and Robotics", which is confirmed by the certificate of use of the dissertation research results. Three methodologies have been developed on the basis of the work — for constructing a nonlinear predictive model of the magnetic separation process using kernel regression with an analytically computable gradient, for tuning the penalty weight matrix of the predictive controller under the condition of self-securing correctness of linearization, and for adaptive identification of the process based on a three-level architecture with kernel functions — which have been transferred to PrJSC "Northern Iron Ore Mining and Processing Plant" (Kryvyi Rih), where they have been accepted for use and planned for application in the

development of the algorithmic and software support of a predictive control system for drum magnetic separators, as confirmed by the corresponding certificate. The main results of the dissertation research have been reviewed by specialists of the said enterprise, who confirmed the practical significance of the proposed approaches and the possibility of taking them into account in further work on improving the control of mineral processing operations, as confirmed by the corresponding act.

Keywords: mathematical modeling of nonlinear processes, modeling, optimization, magnetic separation, predictive control, kernel ridge regression, RBF kernel, K-MPC, asymptotic stability, adaptive identification, Gaussian process, mining and processing plant, iron ore, automation of technological processes.

List of publications.

Articles in international scientometric databases:

1. Volovetskyi O. O. Utilizing Gaussian Process Regression for Nonlinear Magnetic Separation Process Identification. *Informatyka, Automatyka, Pomiar w Gospodarce i Ochronie Środowiska (IAPGOS)*. 2024. Vol. 14, No. 3. P. 21–28. DOI: 10.35784/iapgos.5954. (Scopus)

2. Volovetskyi O. O. Methods of Filtering and Regression for Forecasting Noisy Timeseries Based on Machine Learning. *Herald of Advanced Information Technology*. 2025. Vol. 8, No. 1. P. 13–27. DOI: 10.15276/hait.08.2025.1. (Scopus)

Articles in Ukrainian professional journals:

3. Volovetskyi O. Comprehensive methodology for creating enhanced datasets for modelling the process of magnetic separation of iron ore. *Journal of Kryvyi Rih National University*. 2024. Vol. 22, No. 2. P. 10–27. DOI: 10.31721/2306-5451-2024-2-22-10-27.

4. Volovetskyi O. O. Development and Research of a Synthetic Data Generator for Modeling Technological Parameters of the Iron Ore Beneficiation Process. *Scientific Notes of Tavriya National University named after V. I. Vernadsky. Series: Technical Sciences*. 2025. Vol. 36, No. 2. P. 49–54. DOI: 10.32782/2663-5941/2025.2.2/07.

5. Volovetskyi O. Local Linearization of Kernel Models in Real Time as a Basis for Fast Optimization in MPC. *Automation of Technological and Business Processes*. 2025. Vol. 17, No. 4. P. 98–103. DOI: 10.15673/atbp.v17i4.3319.

Conference proceedings:

6. Volovetskyi O. O. Use of Kernel Methods in Beneficiation Process Control. *Development of Industry and Society: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference* (Kryvyi Rih, 2023). Kryvyi Rih: Kryvyi Rih National University, 2023. P. 231.

7. Volovetskyi O. O., Tron V. V. Predictive Control Accounting for Nonlinearity in Ore Beneficiation. *Computer Intelligent Systems and Networks: Proceedings of the XVII All-Ukrainian Scientific and Practical WEB-Conference* (Kryvyi Rih, 2024). Kryvyi Rih: Kryvyi Rih National University, 2024. P. 240–242.

8. Volovetskyi O. O., Tron V. V. Selection of Regression Method for Dynamic System Modeling: SVR vs GPR. *XIV All-Ukrainian Conference "Young Scientists 2024 – From Theory to Practice"* (Dnipro, 2024). Dnipro: Institute of Industrial and Business Technologies, USUFT, 2024. P. 135–141.

9. Volovetskyi O. Adaptive Method for Filtering Noisy Data in Magnetic Separation Systems Using a Logarithmic Window Width Dependency. *Proceedings of the All-Ukrainian Scientific and Practical Online Conference "Problems of Energy Efficiency and Automation in Industry and Agriculture"* (Kropyvnytskyi, 2024). Kropyvnytskyi: Central Ukrainian National Technical University, 2024. P. 191–193.

10. Volovetskyi O. O., Tron V. V. Optimization of SVR Algorithms for Fast Prediction of Iron Ore Beneficiation Parameters Using Limited Data. *Computer Intelligent Systems and Networks: Proceedings of the XVIII All-Ukrainian WEB-Conference* (Kryvyi Rih, 2025). Kryvyi Rih: Kryvyi Rih National University, 2025. P. 286–289.

11. Volovetskyi O. O. Efficiency of Kernel Predictive Control for Iron Ore Beneficiation: Comparative Analysis. *Development of Education, Science and Business: Results 2025: Proceedings of the International Scientific and Practical Internet Conference* (Dnipro, 2025). Dnipro: FOP Marenichenko V. V., 2025. P. 153–154.

12. Volovetskyi O. O. Stability and Robustness of Kernel Predictive Control for Magnetic Separation. *Proceedings of the XVIII International Scientific and Practical Conference "Information Technologies and Automation – 2025"* (Odesa, 2025). Odesa, 2025. P. 384–387.

13. Volovetskyi O. O. The Transition Process from Static to Dynamic Magnetic Separation Control System. *Development of Industry and Society: Proceedings of the International Scientific and Technical Conference* (Kryvyi Rih, 2025). Kryvyi Rih: Kryvyi Rih National University, 2025. P. 336.

14. Volovetskyi O. O., Tron V. V. Implementation of Fast Predictive Control (K-MPC) for Complex Industrial Plants in the Context of Digital Transformation. *Challenges of the Future: Transformations, Adaptation Strategies and Resilience in an Interdisciplinary Dimension: Proceedings of the All-Ukrainian Conference* (Chernihiv, 2025). Chernihiv: University of Transformation of the Future, 2025. P. 199–201.

15. Volovetskyi O. Kernel-Based Predictive Control of Nonlinear Magnetic Separation Processes. *MCND Conference Proceedings* (Sumy, 2025). Sumy: MCND, 2025. P. 212–217. DOI: 10.62731/mcnd-10.10.2025.002.

16. Volovetskyi O. O., Tron V. V. Diagnosis of Numerical Degradation of Kernel-MPC with Increasing Prediction Horizon. *Computer Intelligent Systems and Networks: Proceedings of the XIX All-Ukrainian WEB-Conference* (Kryvyi Rih, 2026). Kryvyi Rih: Kryvyi Rih National University, 2026. P. 306–308.

17. Volovetskyi O. O., Tron V. V. Criterion for Kernel Model Selection for Predictive Control Based on Analytical Gradient Properties. *XVI All-Ukrainian Conference "Young Scientists 2026 – From Theory to Practice"* (Dnipro, 2026). Dnipro: USUFT, Dnipro Metallurgical Institute, 2026. P. 353–358.

18. Volovetskyi O. O., Tron V. V. Protocol Model for Ensuring Reproducibility of Research in Automated Process Control Systems. *Information Technologies: Theory and Practice: Proceedings of the III (IX) International Scientific and Practical Conference* (Kharkiv–Zaporizhzhia–Dnipro, 25–27 March 2026). Dnipro: Svidler A. L., 2026. P. 588–591.

ЗМІСТ

Вступ.....	25
Розділ 1. Аналіз стану проблеми та постановка задачі дослідження.....	38
1.1. Технологічні основи та системний аналіз процесу магнітної сепарації.....	39
1.2. Методи математичного моделювання та синтезу систем керування	51
1.3. Постановка задачі дослідження.....	58
Висновки до розділу 1	63
Розділ 2. Ядерна прогнозна модель та предиктивне керування процесом магнітної сепарації.....	65
2.1. Вибір методу ядерної регресії.....	66
2.2. Математичний апарат KRR та ідентифікація моделі	72
2.3. Алгоритм предиктивного керування на основі KRR.....	85
2.4. Адаптивна архітектура системи ідентифікації.....	95
Висновки до розділу 2	105
Розділ 3. Аналіз та верифікація системи предиктивного керування К- MPC.....	108
3.1. Теоретичні основи ядерного предиктивного керування в просторі RKHS	109
3.2. Архітектура системи К-MPC та структурно-функціональна схема	116
3.3. Алгоритми оптимізації керуючих впливів	125
3.4. Аналіз стійкості та робастності системи К-MPC.....	131
3.5. Теоретична та статистична валідація.....	140
3.6. Порівняльний аналіз ефективності методів керування (BNK).....	147
Висновки до розділу 3	157
Розділ 4. Практична реалізація та верифікація системи К-MPC	159
4.1. Об'єкт керування та методологія верифікації	159

4.2. Ієрархія керування та інформаційна інфраструктура.....	164
4.3. Програмна реалізація.....	167
4.4. Верифікаційні сценарії.....	173
4.5. Стратегія промислового впровадження.....	177
4.6 Функціональна схема підключення сепаратора ПБМ-90/250 до системи керування К-МРС.....	182
Висновки до розділу 4.....	184
Висновки.....	188
Список використаних джерел.....	191
Додаток А.....	199
Додаток Б.....	208
Додаток В.....	212
Додаток Г.....	227
Додаток Д.....	229
Додаток Е.....	238
Додаток Ж.....	245
Додаток И.....	252
Додаток К.....	254

ВСТУП

Підвищення ефективності збагачення залізорудної сировини є стратегічним завданням гірничо-металургійного комплексу України. Магнітна сепарація — ключова технологічна операція на гірничо-збагачувальних комбінатах Криворізького басейну, від якості керування якою безпосередньо залежать вміст заліза у концентраті та коефіцієнт вилучення корисного компоненту. Водночас процес магнітної сепарації на барабанному сепараторі ПБМ-90/250 характеризується комплексом властивостей, що створюють принципові труднощі для класичних методів автоматичного керування: нелінійні статичні характеристики (S-подібна залежність вмісту заліза від магнітної індукції, екстремальна залежність від густини пульпи), виражені перехресні зв'язки між каналами, транспортне запізнення, що складає десятки секунд, параметрична нестаціонарність, зумовлена варіабельністю мінералогічного складу руди з характерними часами від годин до місяців, та жорсткі технологічні обмеження на керуючі впливи та регламентні показники якості. Існуючі системи керування побудовано переважно за реактивним принципом на основі локальних ПІД-контурів, які не забезпечують системної багатовимірної оптимізації та не враховують обмеження в явній формі.

Світовий досвід розширеного керування процесами (Advanced Process Control) свідчить про методологічну перевагу предиктивних підходів на основі прогнозного керування з ковзним горизонтом (Model Predictive Control, MPC), проте їхнє ефективне застосування до магнітної сепарації залишається нерозв'язаним. Центральною перешкодою є відсутність прогнозної моделі, що одночасно задовольняє трьома суперечливим вимогам: нелінійній адекватності (R1), обчислювальній ефективності (R2) та інтерпретованості параметрів (R3). Порівняльний аналіз шести класів математичних моделей — фізико-механічних,

регресійних, динамічних лінеаризованих, ядер Вольтерра, нейронних мереж та нейро-нечітких моделей — дає підстави стверджувати, що в межах розглянутих підходів одночасне повне задоволення зазначених вимог не досягається. У змістовному плані це відображає наявність системного протиріччя між вимогами R1, R2 та R3. Відтак подолання вказаного протиріччя слід розглядати як необхідну передумову побудови ефективної предиктивної системи керування процесом магнітної сепарації.

Актуальність теми. Криворізький басейн є найбільшим залізорудним регіоном України, на якому функціонують п'ять гірничо-збагачувальних комбінатів. Магнітна сепарація є домінуючою технологічною операцією збагачення залізистих кварцитів, і навіть незначне підвищення коефіцієнта вилучення заліза забезпечує суттєвий економічний ефект у масштабах галузі. Існуюча практика керування на основі локальних ПІД-контурів не забезпечує багатовимірної координації керуючих впливів (магнітної індукції, густини пульпи та витрати живлення), не враховує технологічних обмежень у явній формі та не здатна адаптуватися до параметричної нестаціонарності процесу. Предиктивне керування є визнаною методологією вирішення подібних задач у суміжних галузях (подрібнення, флотація), проте для магнітної сепарації комплексних досліджень, що поєднують нелінійне моделювання з формалізованою оптимізацією в контурі MPC, фактично не проведено. Наявні публікації обмежуються лінійним MPC, адекватним лише у вузькому околі робочої точки, або нелінійним MPC теоретичного чи стендового характеру без дослідження робастності при варіації мінерального складу. У цьому контексті побудова ефективної нелінійної предиктивної системи керування магнітною сепарацією на основі ядерних функцій, орієнтованої на узгодження вимог R1, R2 та R3, постає як

актуальна науково-технічна задача. Її розв'язання має суттєве значення для підвищення ефективності збагачувальних виробництв Кривбасу.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Окремі результати дисертаційного дослідження використано при виконанні науково-дослідної роботи Криворізького національного університету «Удосконалення технологій підземного видобутку руд критичних мінералів з використанням ядерно-фізичних методів та електронної інклінометрії» (державний реєстраційний номер 0126U000841, 2026–2028 рр.), замовник — Міністерство освіти і науки України.

Зокрема, результати дисертації, пов'язані з побудовою нелінійних прогнозних моделей на основі ядерних функцій, алгоритмами предиктивного керування, програмною реалізацією засобів моделювання та аналізом технологічних показників рудопідготовки і збагачення, можуть бути використані при розробленні програмно-аналітичного забезпечення, методичних матеріалів і аналітичних рішень у межах зазначеної НДР.

Мета і завдання дослідження. Метою дисертаційного дослідження є розроблення методології побудови інтегрованої предиктивної системи керування процесом магнітної сепарації, що забезпечує узгоджене багатовимірне керування нелінійним об'єктом з явним дотриманням технологічних обмежень та адаптацію до стохастичної мінливості параметрів сировини.

Для досягнення зазначеної мети поставлено та розв'язано такі завдання:

1. Проаналізувати сучасний стан автоматизації процесу магнітної сепарації, систематизувати математичні моделі процесу та методи синтезу систем керування за вимогами нелінійної адекватності, обчислювальної ефективності та інтерпретованості, встановити їх системне протиріччя для

відомих класів моделей і обґрунтувати доцільність предиктивного керування з прогновною моделлю на основі ядерних функцій.

2. Розробити метод побудови нелінійної прогновної моделі процесу магнітної сепарації на основі ядерних функцій з урахуванням багатовимірних взаємозв'язків в умовах обмеженої апіорної інформації та варіабельності сировини і синтезувати на її основі алгоритм предиктивного керування з оптимізацією на скінченному горизонті, явними обмеженнями на керуючі впливи та вихідні змінні, багатокритеріальним функціоналом якості та адаптивною ідентифікацією.

3. Дослідити динамічні властивості, стійкість та робастність розробленої системи при варіаціях мінерального складу руди, збуреннях і параметричній невизначеності та експериментально верифікувати на колінеарній MiL-платформі переваги системи К-МРС над ПІД-регулятором і лінійним МРС за критеріями точності, швидкодії та стійкості в умовах нестационарності.

4. Сформулювати вимоги до вимірювальної інфраструктури, обчислювальних ресурсів та структури інформаційного обміну для промислового впровадження системи К-МРС у складі АСУТП.

Об'єкт дослідження — процес керування магнітною сепарацією залізорудної сировини в умовах нестационарності технологічних параметрів та варіабельності мінералогічного складу.

Предмет дослідження — методи побудови нелінійних прогнозних моделей на основі ядерних функцій та алгоритми предиктивного керування багатовимірними технологічними процесами збагачення з урахуванням технологічних обмежень.

Методи дослідження. У роботі використано: теорію відтворюваних ядерних гільбертових просторів (RKHS) та методи ядерної регресії (KRR, SVR, GP) для побудови нелінійної прогновної моделі процесу магнітної

сепарації; теорію оптимального керування з ковзним горизонтом та квадратичне програмування для синтезу алгоритму предиктивного керування; метод функцій Ляпунова для дослідження асимптотичної стійкості замкненої системи; метод аналітичної крос-валідації з виключенням по одному (LOO) для налаштування гіперпараметрів ядерної моделі; статистичні методи валідації (довірчі інтервали гаусівського процесу, аналіз залишків) для оцінки адекватності прогнозової моделі; числове моделювання на колінеарній верифікаційній MiL-платформі для порівняльного аналізу ефективності алгоритмів керування.

Межі дослідження. Дисертаційну роботу спрямовано на розроблення та верифікацію методології побудови К-МРС, а не на повний цикл промислового впровадження на конкретному об'єкті. Прийняті в роботі методологічні припущення систематизовано в Додатку А і визначають межі інтерпретації отриманих результатів. Зокрема: навчальні дані синтезовано верифікованим параметричним симулятором PlantDynamics, параметризованим за галузевими даними п'яти ГЗК Кривбасу, з подальшим переходом до промислових даних на фазі Offline-ідентифікації; верифікацію виконано на рівні Model-in-the-Loop (MiL) за IEC 62381, що відповідає першому обов'язковому етапу V-подібної моделі верифікації; параметризацію об'єкта виконано для трьох типів руди Криворізького басейну (магнетитові, змішані, кварцитові) та сепаратора ПБМ-90/250. Кожне з наведених обмежень не заперечує методологічної цінності запропонованого підходу та має визначений шлях зняття у складі чотирифазного плану промислового впровадження (фази Offline-ідентифікації, Shadow Mode, Advisory Mode, Closed Loop) і подальших етапів верифікації (HiL, FAT/SAT).

Наукова новизна одержаних результатів. У дисертаційній роботі одержано такі нові наукові результати:

1. *Вперше для задачі предиктивного керування процесом магнітної сепарації* обґрунтовано критерій вибору ядерної прогновної моделі — введенням вимоги наявності замкненого аналітично обчислюваного градієнта на додаток до нелінійної адекватності, обчислювальної ефективності та інтерпретованості, — що дозволило виділити KRR з RBF-ядром як єдину з розглянутих моделей, придатну для К-МРС, і забезпечило шестикратне прискорення обчислення градієнта порівняно з числовим диференціюванням та гарантовану строгу опуклість QP-задачі.

2. *Вперше для К-МРС з ядерною RBF-моделлю* встановлено достатню умову прийнятності локальної лінеаризації — доведенням, що матриця штрафних ваг $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u^2_{\max})$ утримує відносний крок керування у припустимих межах, — що дозволило обмежити похибку лінеаризації на рівні $\epsilon_{\text{lin}} \approx 0,11\text{--}0,28\%$ (проти допустимого $\delta_{\max} = 5\%$) без зовнішнього механізму trust region, із використанням лише 15–24 % допустимого діапазону приростів.

3. *Набув подальшого розвитку підхід до адаптивної ідентифікації процесу магнітної сепарації* — поєднанням SVR, KRR і GP у єдиній архітектурі зі спільним ядром та функціональним розподілом ролей (фільтрація аномалій, прогнозування, оцінювання невизначеності), — що, на відміну від відомих однорівневих схем, дозволило підвищити точність ідентифікації у 36,3 рази при зміні типу руди та у 15–20 разів при повільному дрейфі параметрів відносно статичної моделі.

4. *Набув подальшого розвитку метод доведення асимптотичної стійкості систем предиктивного керування* — спеціалізацією для К-МРС з нелінійною ядерною моделлю через формулювання достатніх умов на точність моделі, вагові коефіцієнти регулятора та термінальний член, — що дозволило формально гарантувати монотонне спадання функції Ляпунова з

показником збіжності $\lambda_{\max} \approx 0,819 < 1$ та підтвердити збереження стійкості при варіації ширини ядра у діапазоні $\pm 30\%$.

5. *Вперше для задачі предиктивного керування процесом магнітної сепарації* запропоновано стратегію адаптивного консервативного коригування параметрів К-МРС за оцінкою апостеріорної невизначеності GP, що активується при виході робочої точки за межі навчального домену, — реалізовану збільшенням матриці штрафних ваг $R(k)$ пропорційно дисперсії σ^2_{GP} , — що дозволило при виході за межі домену знизити RMSE ідентифікації з 0,3–0,5 (архітектура без GP-наглядача) до 0,22 нормалізованих одиниць та скоротити час відновлення з 6–9 до 5–8 тактів.

Практичне значення одержаних результатів. Практична цінність роботи полягає у створенні комплексу алгоритмічних та програмних засобів предиктивного керування процесом магнітної сепарації, придатного для промислового впровадження на гірничо-збагачувальних комбінатах Криворізького басейну.

Реалізовано програмне забезпечення системи К-МРС у вигляді модульної чотирирівневої архітектури, параметризованої за даними п'яти ГЗК Криворізького басейну для трьох типів руди — магнетитових, змішаних магнетит-кварцитових та кварцитових. Обчислювальна ефективність алгоритму забезпечує наскрізний час обчислення одного такту $t_{p95} \approx 3$ мс при такті дискретизації $\Delta t = 60$ с (запас реального часу $\approx 20\,000\times$) за сумарних ресурсних вимог близько 2 МБ оперативної пам'яті, що сумісно з промисловими контролерами рівня PLC/IPC і підтверджує придатність системи до промислового застосування.

Побудовано колінеарну верифікаційну MiL-платформу з трьома режимами на єдиній моделі технологічного процесу, що забезпечує методологічну коректність порівняльного аналізу. Колінеарний порівняльний аналіз шести методів керування у трьох сценаріях підтвердив,

що K-MPC досягає якості нелінійного MPC (NMPC) при у 17–70 разів меншому часі обчислення, забезпечує приблизно дворазове покращення точності керування відносно ПІД-регулятора (середньоквадратична похибка за вмістом заліза 0,5–0,7 % проти 1,2–1,5 %) та нульове перерегулювання при зміні заданого значення; в умовах параметричної нестаціонарності процесу перевага над ПІД-регулятором зростає до 3–4 разів. Трирівнева адаптивна архітектура SVR $\rightarrow$ KRR $\rightarrow$ GP підвищує точність ідентифікації до 36 разів при зміні типу руди та у 15–20 разів при повільному дрейфі параметрів відносно статичної моделі.

Розроблено чотирифазний план промислового впровадження відповідно до ІЕС 62381 з кількісними критеріями переходу між фазами (офлайн-навчання за вибіркою $n \geq 500$; середньоквадратична похибка $< 0,8$ % у режимі Shadow Mode; готовність програмного забезпечення $> 99,9$ %; частка прийнятих рекомендацій понад 60 %) та механізмом обмеженого авторитету ($\Delta B \leq 0,005$ Тл/крок, $\Delta p \leq 20$ кг/м³/крок, $\Delta Q \leq 50$ м³/год/крок), що обмежує швидкість зміни керуючих впливів і гарантує автоматичне повернення до ПІД-режиму при збоях рівня розширеного керування. Орієнтовна тривалість фаз програмного забезпечення становить 7–8 тижнів; очікуваний технологічний ефект — підвищення коефіцієнта вилучення заліза на 1–2 % за рахунок стабілізації технологічного режиму.

Результати дисертаційного дослідження використовуються у навчальному процесі Криворізького національного університету при підготовці здобувачів другого (освітньо-наукового) рівня вищої освіти за освітньо-науковою програмою «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» спеціальності G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка», що підтверджується довідкою про використання результатів дисертаційної роботи (додаток Г). За результатами дисертаційної роботи розроблено три методики: методику

побудови нелінійної прогнозної моделі процесу магнітної сепарації на основі ядерної регресії з аналітично обчислюваним градієнтом (додаток Д); методику налаштування матриці штрафних ваг предиктивного регулятора за умовою самозабезпечення коректності лінеаризації (додаток Е); методику адаптивної ідентифікації процесу магнітної сепарації на основі трирівневої архітектури з ядерними функціями (додаток Ж). Зазначені методики передано до ПРАТ «Північний гірничо-збагачувальний комбінат» (ПРАТ «ПІВНГЗК», м. Кривий Ріг), де їх прийнято до використання та заплановано до застосування при розробці алгоритмічного і програмного забезпечення системи предиктивного керування барабанными магнітними сепараторами, що підтверджується відповідною довідкою (додаток И). Згідно з довідкою, очікуваним ефектом від застосування розроблених методик є підвищення стабільності вмісту заліза в концентраті β_{Fe} зі зменшенням середньоквадратичної похибки керування до 0,5–0,7 %, утримання β_{Fe} на цільовому рівні 65–68 % за частки часу з падінням нижче регламентного мінімуму 65 % не більш ніж 1 %, підвищення коефіцієнта вилучення заліза ϵ на 1–2 п.п. та збереження заданих показників якості концентрату при зміні типу руди й дрейфі складу сировини без втручання оператора. Основні результати дисертаційної роботи розглянуто фахівцями ПРАТ «Північний гірничо-збагачувальний комбінат», які підтвердили практичну значущість запропонованих підходів для подальшого розвитку науково-технічних рішень щодо моделювання та керування процесами збагачення мінеральної сировини і можливість їх урахування у подальших роботах (акт, додаток К).

Особистий внесок здобувача. Усі наукові результати, що виносяться на захист, одержано здобувачем особисто. У працях, опублікованих у співавторстві, здобувачеві належить: розроблення математичних моделей ядерної регресії для прогнозного керування, синтез алгоритмів К-МРС,

проведення обчислювальних експериментів, аналіз та інтерпретація результатів [1, 3, 5, 10, 11, 12]; формулювання критерію вибору ядерної моделі на основі властивостей аналітичного градієнта [12]; порівняльний аналіз методів регресії SVR та GPR для моделювання динамічних систем [3]; розроблення алгоритмів оптимізації SVR для прогнозування параметрів збагачення [5]; реалізація алгоритму швидкого предиктивного керування для промислових об'єктів [10]; діагностика числової деградації Kernel-MPC при збільшенні горизонту прогнозування [11]. Співавтору Троню В. В. належить наукове керівництво та консультування щодо постановки задач дослідження.

Номери публікацій відповідають списку наукових праць здобувача, наведеному в додатку Б.

Використання інструментів штучного інтелекту. Під час підготовки дисертації інструменти штучного інтелекту на основі великих мовних моделей використовувалися як допоміжний засіб — для редагування та стилістичного вдосконалення тексту, структурування викладу, перевірки узгодженості позначень і формулювань, а також оформлення допоміжних матеріалів. Усі наукові результати, математичні моделі, алгоритми, обчислювальні експерименти та висновки, що виносяться на захист, одержано та верифіковано здобувачем особисто; інструменти штучного інтелекту не застосовувалися для генерування наукових результатів, фактичних даних чи джерел. Здобувач несе повну відповідальність за зміст, достовірність та наукову обґрунтованість усіх положень дисертації.

Апробація результатів дисертації. Основні положення та результати дисертаційної роботи доповідались та обговорювались на: Міжнародній науково-технічній конференції «Розвиток промисловості та суспільства» (м. Кривий Ріг, 2023, 2025); XIV Всеукраїнській конференції

«Молоді вчені 2024 – від теорії до практики» (м. Дніпро, 2024); XVII Всеукраїнській науково-практичній WEB-конференції аспірантів, студентів та молодих вчених «Комп'ютерні інтелектуальні системи та мережі» (м. Кривий Ріг, 2024); Всеукраїнській науково-практичній on-line конференції «Проблеми енергоефективності та автоматизації в промисловості та сільському господарстві» (м. Кропивницький, 2024); XVIII Всеукраїнській науково-практичній WEB-конференції аспірантів, студентів та молодих вчених «Комп'ютерні інтелектуальні системи та мережі» (м. Кривий Ріг, 2025); International Scientific and Practical Internet Conference «Development of Education, Science and Business: Results 2025» (Dnipro, Ukraine, 2025); XVIII Міжнародній науково-практичній конференції «Інформаційні технології і автоматизація – 2025» (м. Одеса, 2025); Всеукраїнській науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених «Виклики майбутнього: трансформації, стратегії адаптації та стійкість у міждисциплінарному вимірі» (м. Чернігів, 2025); конференції Міжнародного центру наукових досліджень (м. Суми, 2025); XIX Всеукраїнській науково-практичній WEB-конференції аспірантів, студентів та молодих вчених «Комп'ютерні інтелектуальні системи та мережі» (м. Кривий Ріг, 2026); XVI Всеукраїнській конференції «Молоді вчені 2026 – від теорії до практики» (м. Дніпро, 2026); III (IX) Міжнародній науково-практичній конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених (Харків–Запоріжжя–Дніпро, 2026).

Публікації. За результатами дисертаційного дослідження опубліковано 18 наукових праць, у тому числі: 5 статей, з них 1 — у зарубіжному виданні, що входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus, 1 — у науковому фаховому виданні України, що входить до міжнародної наукометричної бази даних Scopus, та 3 — у наукових фахових виданнях України; 13 тез доповідей на наукових конференціях.

Структура та обсяг дисертації.

Дисертація складається із анотації, вступу, чотирьох розділів, висновків, списку використаних джерел з 80 найменувань на 11 сторінках та 9 додатків на 57 сторінках, містить 46 таблиць та 13 рисунків. Основний текст роботи викладено на 164 сторінках. Загальний обсяг роботи становить 254 сторінки.

У першому розділі виконано системний аналіз процесу магнітної сепарації як об'єкта автоматичного керування, систематизовано вітчизняний і світовий досвід автоматизації, а також проведено порівняльний аналіз шести класів математичних моделей. Узагальнення результатів цього аналізу дало підстави виявити наявність системного протиріччя між вимогами R1, R2 та R3. На цій основі сформульовано мету дослідження та чотири основні задачі, спрямованих на її досягнення.

У другому розділі побудовано ядерну прогнозну модель на основі KRR з RBF-ядром, отримано замкнений аналітичний градієнт, синтезовано алгоритм предиктивного керування К-МРС з технологічно обґрунтованими вагами, доведено умову самозабезпечення прийнятності лінеаризації та розроблено тривірневу адаптивну архітектуру $SVR \rightarrow KRR \rightarrow GP$ зі стратегією консервативного керування.

У третьому розділі побудовано модель простору стану на основі lifting-оператора, сформульовано та доведено достатні умови асимптотичної стійкості замкненої системи, виконано незалежну верифікацію аналітичного градієнта та GP-предиктора, а також проведено колінеарний порівняльний аналіз ефективності шести методів керування на верифікаційних сценаріях.

У четвертому розділі реалізовано програмне забезпечення системи К-МРС у вигляді модульної архітектури, параметризованої під обладнання п'яти ГЗК Кривбасу, побудовано верифікаційну MiL-платформу,

підтверджено відповідність встановленим критеріям якості та розроблено чотирифазний план промислового впровадження відповідно до ІЕС 62381.

РОЗДІЛ 1.

АНАЛІЗ СТАНУ ПРОБЛЕМИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ДОСЛІДЖЕННЯ

Ефективність збагачення залізорудної сировини на гірничо-збагачувальних комбінатах Кривбасу значною мірою визначається якістю керування процесом магнітної сепарації. Поєднання нелінійних статичних характеристик об'єкта, суттєвого транспортного запізнення, параметричної нестационарності, зумовленої мінливістю мінерального складу руди, та жорстких технологічних обмежень обумовлює принципові труднощі для класичних методів автоматизації. Світова практика розширеного керування процесами свідчить про методологічну перевагу предиктивних підходів, проте їхнє застосування до магнітної сепарації залишається нерозв'язаним через відсутність прогнозної моделі, що одночасно задовольняє вимогам нелінійної адекватності, обчислювальної ефективності та інтерпретованості.

Мета розділу — виконати системний аналіз процесу магнітної сепарації як об'єкта автоматичного керування, систематизувати існуючі методи моделювання та синтезу систем керування і на цій основі сформулювати задачі дисертаційного дослідження. У підрозділі 1.1 виконано формалізацію об'єкта керування, проаналізовано вітчизняний та світовий досвід автоматизації, встановлено місце К-МРС в ієрархії промислових систем та проведено порівняльний аналіз класів моделей. Підрозділ 1.2 присвячено систематизації методів ідентифікації нелінійних систем, адаптивних механізмів, інтелектуальних підходів та теорії предиктивного керування. У підрозділі 1.3 на підставі виконаного аналізу визначено об'єкт, предмет і мету дослідження, сформульовано чотири задачі та встановлено їхнє відображення на структуру роботи.

1.1. Технологічні основи та системний аналіз процесу магнітної сепарації

Підрозділ присвячено формалізації магнітної сепарації як об'єкта автоматичного керування та аналізу стану методів його автоматизації. Послідовно розглядаються фізико-технологічні основи та структура об'єкта, вітчизняний і світовий досвід предиктивного керування, місце К-МРС в архітектурі промислових систем, порівняльна характеристика класів прогнозних моделей та зіставлення парадигм автоматизації.

1.1.1 Фізико-технологічні основи магнітної сепарації. Структура об'єкта керування

В основі магнітної сепарації лежить селективне вилучення магнітосприйнятливих частинок (магнетит Fe_3O_4 , маггеміт $\gamma\text{-Fe}_2\text{O}_3$) під дією неоднорідного магнітного поля за різницею магнітної сприйнятливості мінералів [1]. Базовим апаратом мокрої магнітної сепарації у схемах збагачення магнетитових кварцитів є барабанний магнітний сепаратор типу ПБМ-90/250, конструктивно представлений нерухомою магнітною системою та обертовим барабаном [2, 3]. Водно-рудна суспензія (пульпа) подається у робочу зону, де магнітна фракція притягується до барабана і транспортується до зони розвантаження, тоді як немагнітна порода видаляється потоком [1, 3].

До основних керуючих параметрів процесу МС належать компоненти вектора керуючих впливів $u = (B, \rho, Q)^T \in \mathbb{R}^3$, наведені в табл. 1.1.

Діапазони параметрів відповідають паспортним характеристикам сепаратора ПБМ-90/250 [3] та промисловим режимам збагачення залізистих кварцитів Криворізького басейну. Повний перелік вихідних параметрів процесу, прийнятих для моделювання та верифікації, наведено у додатку В.

Таблиця 1.1 Керуючі параметри процесу магнітної сепарації ПБМ-90/250

Змінна	Фізичний зміст	Діапазон	Номінал	Одиниця
B	Магнітна індукція в робочій зоні	0,08–0,18	0,12–0,15	Тл
P	Густина пульпи	1200–1600	1350–1450	кг/м ³
Q	Об'ємна витрата пульпи	200–600	350–450	м ³ /год

Поряд із керуючими параметрами, якість сепарації характеризується вектором $y = (\beta_{Fe}, \varepsilon)^T \in \mathbb{R}^2$, де β_{Fe} — масова частка заліза в концентраті, ε — коефіцієнт вилучення заліза в магнітний продукт (табл. 1.2).

Таблиця 1.2 Контрольовані показники процесу магнітної сепарації

Змінна	Фізичний зміст	Діапазон	Номінал	Одиниця
β_{Fe}	Вміст заліза в концентраті	60–72	65–68	%
ε	Коефіцієнт вилучення заліза	55–95	78–85	%

Між β_{Fe} та ε існує технологічний конфлікт: підвищення B збільшує вилучення ε , але знижує селективність [4], що призводить до потрапляння порожньої породи у концентрат і зниження β_{Fe} . Цей конфлікт обумовлює необхідність багатокритеріальної оптимізації.

Статичні характеристики процесу МС мають виражений нелінійний характер, що підтверджено експериментальними дослідженнями та результатами математичного моделювання. Залежність $\beta_{Fe}(B)$ має S-подібний (сигмоїдний) характер [5]: при малих значеннях B вилучення

мінімальне, при середніх — відбувається інтенсивне зростання, при високих — насичення. Залежність β_{Fe} від густини пульпи має екстремальний характер з оптимумом ρ_{opt} : для магнетитових руд (тип М) $\rho_{opt} \approx 1350$ кг/м³, для змішаних (тип МХ) $\rho_{opt} \approx 1400$ кг/м³, для кварцитових (тип Q) $\rho_{opt} \approx 1450$ кг/м³. Між каналами керування спостерігаються виражені перехресні зв'язки, що суттєво ускладнює декомпозицію на незалежні одновимірні контури. Характер нелінійних залежностей наочно ілюстровано на рис. 1.1.

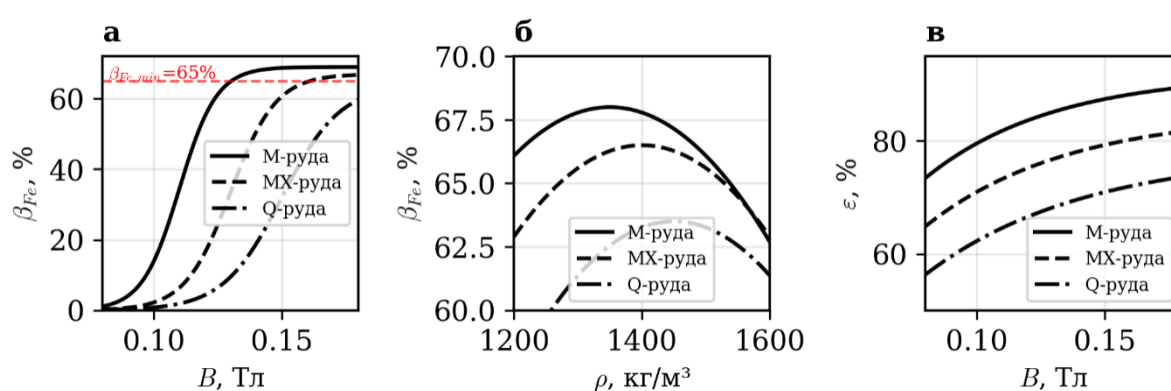


Рис. 1.1 Статичні характеристики процесу магнітної сепарації: а — $\beta_{Fe}(B)$; б — $\beta_{Fe}(\rho)$; в — $\epsilon(B)$

Окрім статичних нелінійностей, суттєвий вплив на вибір стратегії керування мають динамічні характеристики процесу МС, що визначаються параметрами, наведеними у табл. 1.3.

Таблиця 1.3 Динамічні характеристики процесу магнітної сепарації

Параметр	Позначення	Значення	Примітка
Такт керування	T_s	60 с	Визначається циклом XRF-аналізатора
Транспортне запізнення	τ	120–180 с	Відповідає 2–3 крокам T_s

Параметр	Позначення	Значення	Примітка
Постійна часу об'єкта	T	300–600 с	Визначає горизонт прогнозу

Такт $T_s = 60$ с обумовлений періодом отримання даних від рентгенофлуоресцентного (XRF) аналізатора [6]. Транспортне запізнення $\tau = 120\text{--}180$ с є наслідком часу проходження пульпи від точки регулювання до точки аналізу [7]. Наявність запізнення 2–3 кроки T_s має принципове значення для вибору стратегії керування: реактивний регулятор (за відхиленням) не здатний компенсувати збурення, що вже пройшли через запізнення.

Додатковим фактором, що ускладнює задачу керування, є шум вимірювань. Контрольовані показники вимірюються з похибками, зумовленими стохастичністю процесу та обмеженою точністю аналітичного обладнання. Середньоквадратичне відхилення шуму становить $\sigma_{\text{noise}}(\beta_{\text{Fe}}) = 1,5\%$ та $\sigma_{\text{noise}}(\varepsilon) = 2,0\%$ [8], що у нормалізованому масштабі відповідає $\sigma_{\eta} \approx 0,1$.

Поряд із шумом вимірювань, суттєвою характеристикою процесу є нестационарність його параметрів. Параметри процесу МС мають нестационарний характер; доцільно виділити три класи нестационарності, що відрізняються часовими масштабами:

1. варіація мінерального складу руди — характерний часовий масштаб: від кількох годин до зміни; один із основних чинників параметричної невизначеності на ГЗК Кривбасу, де чергуються магнетитові, кварцитові та змішані руди;

2. зміна гранулометричного складу — характерний часовий масштаб: тижні та сезонні цикли; пов'язана зі зміною умов видобутку та подрібнення;

3. знос барабана сепаратора — характерний часовий масштаб: місяці; зумовлює повільний дрейф параметрів моделі зі швидкістю 0,1–0,3 % на 1000 кроків керування (детальний аналіз — §2.4.1).

Наслідки нестаціонарності є критичними для якості керування: при зміні типу руди без адаптації моделі похибка прогнозу зростає на порядок відносно номінального режиму, що суттєво ускладнює ефективне застосування прогнозного керування (кількісні оцінки наведено у §2.4.1).

Нарешті, процес МС підпорядковується жорстким технологічним обмеженням: $\Delta B \leq 0,005$ Тл/крок (≈ 5 % від робочого діапазону); $\beta_{Fe} \geq 65$ %. Додаткові обмеження накладаються на швидкість зміни $\Delta u / \Delta t$ для стабільності технологічного режиму.

Узагальнюючі наведені характеристики, процес МС формалізується як нелінійна МІМО-система з трьома входами та двома виходами, що має виражені перехресні зв'язки, суттєве транспортне запізнення ($\tau = 2$ –3 кроки T_s), параметричну нестаціонарність з різними часовими масштабами та жорсткі технологічні обмеження. Сукупність цих характеристик обумовлює неспроможність класичного локального регулювання забезпечити системну оптимальність та визначає необхідність нелінійної прогнозової моделі та адаптивного механізму. Структурну схему об'єкта керування наведено на рис. 1.2.

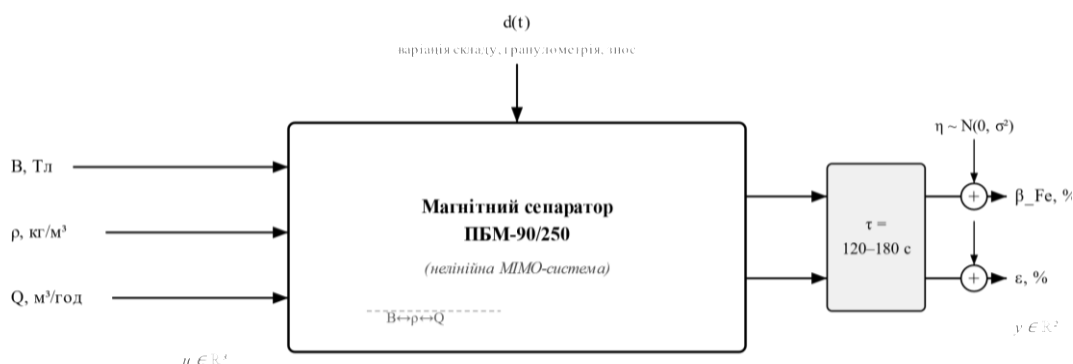


Рис. 1.2 Структурна схема процесу магнітної сепарації як об'єкта керування

1.1.2 Аналіз вітчизняного досвіду автоматизації збагачувальних процесів

Основний внесок у розвиток теорії та практики автоматизації збагачувальних процесів в Україні здійснено науковими школами Криворізького національного університету (КНУ, м. Кривий Ріг), Національного технічного університету «Дніпровська політехніка» (НТУ «ДП», м. Дніпро), Національної металургійної академії України (НМетАУ), Інституту геотехнічної механіки НАН України (ІГС НАН України) та Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут» (КПІ).

Розвиток вітчизняних методів автоматизації збагачувальних процесів відбувався в три етапи, кожен з яких характеризується певним рівнем складності моделей та стратегій керування.

На першому етапі було створено фізично орієнтовані моделі процесів збагачення: траєкторні моделі руху частинок у магнітному полі та балансові моделі масопотоків [1]. На основі цих моделей реалізовано перші локальні регулятори окремих параметрів. Обмеженнями підходу є висока обчислювальна складність траєкторних моделей та необхідність повторної ідентифікації при зміні мінералогічного складу сировини.

Другий етап пов'язаний із застосуванням ядер Вольтерра для опису нелінійних динамічних характеристик [9], адаптивних ПД-регуляторів для компенсації параметричного дрейфу [10] та ультразвукових методів контролю параметрів пульпи [7]. Обмеженнями є експоненційне зростання кількості параметрів ядер Вольтерра з підвищенням порядку [11] та збережена орієнтація на локальні контури керування.

Третій етап характеризується застосуванням нейро-нечітких архітектур та ієрархічних багаторівневих структур керування [12]. Нейронні мережі та системи нечіткого логічного виведення забезпечують

апроксимацію нелінійних залежностей, а ієрархічні структури дозволяють координувати роботу підсистем. Проте ці рішення мають суттєві обмеження: моделі типу «чорна скринька» без інтерпретованості; предиктивна стратегія з ковзним горизонтом не реалізована [4]; технологічні обмеження враховуються лише апаратними насиченнями, а не формально у задачі оптимізації.

1.1.3 Світовий досвід предиктивного керування процесами збагачення

Світова практика автоматизації збагачувальних процесів розвивається в рамках APC (Advanced Process Control), центральним елементом якої є MPC (Model Predictive Control) [13]. На відміну від класичного регулювання за відхиленням, MPC оптимізує послідовність керуючих впливів на скінченному горизонті з явним урахуванням обмежень [14], реалізуючи лише перший крок оптимальної послідовності (принцип ковзного горизонту).

У промисловій практиці найбільш зрілі реалізації MPC задокументовано для процесів подрібнення у напіваавтогенних млинах (SAG) в Австралії та Канаді [15] та для флотації у Чилі й Південній Африці [16]. Провідні постачальники Metso та FLSmidth пропонують комерційні APC-пакети з MPC-модулями [17, 18].

Водночас кількість задокументованих досліджень щодо застосування MPC безпосередньо до МС є обмеженою. Наявні публікації з Швеції та Китаю описують реалізації на основі лінійних прогнозних моделей (LMPC), адекватних лише у вузькому околі робочої точки [13]. NMPC для МС представлено переважно на теоретичному рівні. Комплексні дослідження робастності MPC при варіації мінералогічного складу фактично відсутні [19].

1.1.4 Системи розширеного керування та цифрові технології у збагаченні

Стандарт ISA-95 (IEC 62264) визначає п'ятирівневу ієрархію промислової автоматизації [20], в рамках якої К-МРС займає чітко визначене місце. На рівнях L0–L1 функціонують програмовані логічні контролери (ПЛК) та системи протиаварійного захисту (ПАЗ), що реалізують апаратне обмеження $\Delta V \leq 0,005$ Тл/крок. На рівні L2 розміщується контролер К-МРС з оптимізацією кожні $T_s = 60$ с. На рівні L3 функціонують системи MES (Manufacturing Execution System) та SCADA (Supervisory Control and Data Acquisition). Обмін між рівнями забезпечується OPC UA [21] із затримкою ≤ 6 с ($< T_s/10$).

У рамках цієї ієрархії сучасна парадигма Industry 4.0 передбачає створення цифрових двійників (Digital Twin) технологічних процесів [22] — програмних моделей, що підтримують двосторонній зв'язок з фізичним об'єктом у реальному часі [23]. У контексті МС цифровий двійник виконує функцію прогнозної моделі К-МРС та інструменту оптимізації режимів, навчання персоналу й діагностики стану обладнання. Ключовим викликом є адекватність нелінійної моделі при змінному складі руди та інтерпретованість параметрів для верифікації технологічним персоналом.

З практичної точки зору, ефективне впровадження К-МРС у промислову інфраструктуру вимагає: забезпечення сумісності з існуючими системами SCADA/MES через стандартні протоколи; реалізації механізмів безпечного переходу між режимами керування (ручний — автоматичний — предиктивний); дотримання вимог кібербезпеки відповідно до стандарту IEC 62443 [24]. Ці задачі деталізуються у розділі 4.

1.1.5 Систематизація математичних моделей процесу магнітної сепарації

На підставі проведеного аналізу сформульовано три взаємно суперечливі вимоги до прогнозної моделі МРС:

R1 — нелінійна адекватність: модель має відтворювати S-подібну залежність $\beta_{Fe}(B)$ та екстремальну $\beta_{Fe}(\rho)$, встановлені у §1.1.1. Як показано у §2.2, похибка лінійної моделі при $\Delta B = \pm 0,15$ Тл становить 12–18 %, що є недостатнім для задач прогнозного керування;

R2 — обчислювальна ефективність: при горизонті $N_p = 10\text{--}20$ та $N_{pred} = 20\text{--}50$ кількість викликів моделі сягає 200–1000 за такт $\Delta t = 60$ с; складність одного виклику не має перевищувати $O(n)$ при $n = 500\text{--}1500$ спостережень;

R3 — інтерпретованість параметрів: промислові регламенти ГЗК вимагають верифікації моделі технологічним персоналом; модель типу «чорна скринька» цього не забезпечує.

У табл. 1.4 наведено результати порівняння шести класів моделей за критеріями R1–R3.

Таблиця 1.4 Порівняння класів моделей за критеріями R1–R3

Клас моделей	R1 (нелінійна адекватність)	R2 (обчислювальна ефективність)	R3 (інтерпретованість)	Придатність для МРС
Фізико-механічні (траєкторні, балансові)	Задовільно	Не задовольняє	Висока	Не придатні

Клас моделей	R1 (нелінійна адекватність)	R2 (обчислювальна ефективність)	R3 (інтерпретованість)	Придатність для MPC
Регресійні (лінійні, поліноміальні)	Частково	Висока	Задовільно	Обмежена (вужька область)
Динамічні лінеаризовані (State-Space)	Не задовольняє	Висока	Задовільно	LMPC: лише в околі робочої точки
Ядра Вольтерра	Задовільно	Не задовольняє (порядок↑)	Частково	Не придатні
Нейронні мережі (MLP, LSTM)	Висока	Задовільно	Не задовольняє	Ризик екстраполяції
Нейро-нечіткі (ANFIS)	Висока	Задовільно	Частково	«Сіра скринька»

Фізико-механічні моделі забезпечують R1 та R3, проте обчислювальна складність суттєво обмежує їх використання у реальному часі (R2). Регресійні та State-Space моделі є ефективними, але не відтворюють нелінійностей у широкому діапазоні. Ядра Вольтерра забезпечують R1, але кількість параметрів зростає експоненційно [11]. Нейронні мережі (MLP, LSTM) є потужними апроксиматорами [25], що

суттєво розширили можливості опису нелінійних процесів, проте мають структуру «чорної скриньки», що ускладнює верифікацію технологічним персоналом (R3), та ризик непередбачуваної поведінки при екстраполяції [26]. ANFIS займають проміжне положення: часткова інтерпретованість втрачається при збільшенні кількості входів [27].

Проведений аналіз свідчить, що жоден із розглянутих класів у повній мірі не задовольняє сукупності вимог R1, R2 та R3. Узагальнення результатів порівняльного аналізу дає підстави стверджувати, що в межах розглянутих класів моделей одночасне повне задоволення вимог R1–R3 не досягається, що формалізується як

$$R1 \cap R2 \cap R3 = \emptyset \quad (1.1)$$

Співвідношення (1.1) узагальнює результати проведеного аналізу та вказує на доцільність пошуку нового підходу. Вирішення потребує критерію, що забезпечує сумісність нелінійної адекватності з обчислювальною ефективністю; він формулюється у розділі 2.

1.1.6 Порівняльний аналіз вітчизняних та світових підходів

Результати зіставлення вітчизняних та світових підходів наведено у табл. 1.5.

Таблиця 1.5 Порівняння вітчизняних та світових підходів до автоматизації МС

Критерій	Вітчизняна школа	Світові системи АРС
Рівень інтеграції	Локальні контури	Багаторівнева глобальна оптимізація
Тип моделі	Фізично обґрунтована, часто лінеаризована	Гібридні та нелінійні в контурі МРС

Критерій	Вітчизняна школа	Світові системи APC
Принцип керування	Реактивний (за відхиленням)	Предиктивний (ковзний горизонт)
Інформаційна архітектура	Автономні підсистеми	Інтегровані цифрові платформи

Перевагою вітчизняного підходу є глибоке розуміння фізичних механізмів та верифікованість моделей; обмеженням — реактивний характер та відсутність координації між контурами. Світові APC-системи орієнтовані на багатовимірну предиктивну оптимізацію, проте для МС залишається невирішеною проблема адекватної нелінійної моделі.

Розвиток систем автоматизації відбувається від локальної стабілізації через предиктивну оптимізацію до кіберфізичних систем з цифровими двійниками [28]. MPC є методологічно найбільш відповідним інструментом для цього переходу, оскільки природно забезпечує багатовимірність, явне врахування обмежень та превентивну стратегію [19].

Разом з тим жодна з наявних систем — ні вітчизняних, ні міжнародних — не забезпечує повного поєднання нелінійного моделювання, формалізованої оптимізації з явними обмеженнями та інтегрованої цифрової інфраструктури для МС. Ключовою перешкодою є прогнозна модель, що має задовольняти суперечливим вимогам R1–R3 (§1.1.5). Вирішенню через ядерну прогнозну модель та синтез K-MPC присвячено §§1.2–1.3.

Аналіз процесу магнітної сепарації як об'єкта керування показав, що поєднання нелінійності, транспортного запізнення, параметричної нестационарності та жорстких технологічних обмежень істотно звужує можливості застосування класичних методів автоматизації. Узагальнення результатів розгляду вітчизняних підходів і світових APC-систем дає

підстави стверджувати, що для процесу МС поки не сформовано комплексного рішення, здатного одночасно узгодити вимоги R1, R2 та R3. Це, у свою чергу, обґрунтовує доцільність розроблення нового підходу на основі ядерної прогностної моделі, якому присвячено наступні підрозділи дисертації.

1.2. Методи математичного моделювання та синтезу систем керування

Підрозділ присвячено систематизації методів математичного моделювання та синтезу систем керування, придатних для побудови К-МРС на основі аналізу об'єкта, виконаного в §1.1. Послідовно розглядаються методи ідентифікації нелінійних систем, підходи до адаптації в умовах нестаціонарності, інтелектуальні методи автоматизації та метод прогностного керування МРС як основа для синтезу контролера.

1.2.1 Методи ідентифікації нелінійних систем

Класичним підходом до ідентифікації нелінійних систем є параметричні методи, що передбачають апріорне задання структури моделі. Ряди Вольтерра описують нелінійну динаміку через ієрархію ядер зростаючого порядку [11]. Для процесу МС, де нелінійності мають порядок вище другого (S-подібна залежність $\beta_{Fe}(B)$), кількість параметрів ядер Вольтерра зростає експоненційно з порядком, що порушує R2 [29]. Моделі Гаммерштейна-Вінера реалізують декомпозицію нелінійної системи на статичну нелінійність та лінійну динамічну ланку [30]. Перевагою є обмежена кількість параметрів, проте структура обмежена класом нелінійностей, представлених блочно-орієнтованою архітектурою. Для МС, де перехресні зв'язки між каналами B, p та Q є суттєвими (§1.1.1), блочно-орієнтована структура не забезпечує необхідної адекватності.

Альтернативний підхід до ідентифікації нелінійних систем реалізують нейронні мережі. Багатошарові перцептрони (MLP) є універсальними апроксиматорами, здатними наближувати довільну неперервну функцію з будь-якою заданою точністю [31]. Для задачі ідентифікації МС нейронні мережі задовольняють R1, проте непрозора структура («чорна скринька») суттєво ускладнює верифікацію технологічним персоналом, що обмежує виконання R3. Рекурентні мережі (LSTM) забезпечують врахування часових залежностей, проте додаткова складність архітектури ускладнює інтерпретацію та підвищує обчислювальні витрати.

Окремий клас становлять методи ядерної регресії, що здійснюють нелінійне відображення вхідних даних у простір ознак через ядерну функцію без явної конструкції цього простору. До цього класу належать: гребенева регресія на основі ядерних функцій (Kernel Ridge Regression, KRR), метод опорних векторів для регресії (Support Vector Regression, SVR), гаусівські процеси (Gaussian Processes, GP) та метод найменших квадратів опорних векторів (LS-SVM). Спільною математичною основою є відтворюваний ядерний гільбертів простір (RKHS — Reproducing Kernel Hilbert Space) [32]. Для KRR та GP розв'язок є замкненим (closed-form), що принципово відрізняє їх від ітеративних процедур навчання нейронних мереж. Ядерні методи поєднують апроксимаційну здатність (R1) з аналітичною структурою, що забезпечує інтерпретованість через вагові коефіцієнти α_i та ядерну функцію $k(\cdot, \cdot)$ (R3).

Серед методів ядерної регресії гаусівські процеси забезпечують не лише точкову оцінку, а й оцінку невизначеності прогнозу у вигляді апостеріорної дисперсії. Проте обчислювальна складність GP є суттєвим обмеженням: навчання — $O(n^3)$, прогноз — $O(n^2)$ [33], де n — обсяг навчальної вибірки. При $n = 500\text{--}1500$ спостережень (§1.1.5) та необхідності

200–1000 викликів за такт $T_s = 60$ с застосування GP у контурі MPC реального часу є проблематичним з точки зору R2.

Таким чином, методи ядерної регресії є найбільш перспективними кандидатами для прогнозної моделі MC завдяки поєднанню нелінійної адекватності (R1), прийнятної обчислювальної складності прогнозу $O(n)$ для KRR (R2) та інтерпретованості через ядерну структуру (R3). Проте остаточний вибір між KRR, SVR та GP потребує введення додаткового критерію, пов'язаного зі специфічними вимогами оптимізації у контурі MPC. Цей критерій обґрунтовується у §2.1.

1.2.2 Адаптивні та самоналаштовувані системи керування

Модельно-еталонне адаптивне керування (MRAC) забезпечує підлаштування параметрів регулятора шляхом мінімізації відхилення виходу від еталонної моделі [34]. Самоналаштовувальні регулятори (STR) реалізують непряму адаптацію через оцінювання параметрів моделі на кожному кроці з подальшим перерахунком закону керування [35]. Обидва підходи передбачають єдиний механізм реакції на всі типи збурень: виявлення відхилення $\rightarrow$ перенавчання параметрів.

Сучасні методи адаптації включають алгоритми виявлення концептуального дрейфу (concept drift detection), що відстежують зміну статистичних характеристик потоку даних. Метод ковзного вікна (sliding window) обмежує навчальну вибірку останніми W спостереженнями, забезпечуючи поступове оновлення моделі. Ширина вікна W визначає баланс між чутливістю до змін (мале W) та стійкістю до шуму (велике W) [35].

Проте ключовим обмеженням однорівневих адаптивних схем є однакова реакція на якісно різні типи збурень. Однорівнева схема не розрізняє аномалії (раптові викиди, залипання сенсорів) та справжній параметричний дрейф (зміна мінерального складу). При відсутності

попередньої фільтрації аномалій навчальна вибірка забруднюється, що суттєво підвищує ефективну дисперсію шуму та деградує якість ідентифікації. Кількісні оцінки (§2.4.2) свідчать про можливість покращення якості на порядок при диференціації аномалій та дрейфу порівняно з однорівневою адаптацією.

Наведені кількісні оцінки свідчать про принципову недостатність однорівневих схем для процесу МС. Аномалії мають бути відфільтровані до потрапляння у навчальну вибірку, справжній параметричний дрейф потребує перенавчання моделі, а при виході за межі навчального домену необхідна третя реакція — консервативне керування з обмеженням амплітуди впливів. Ця логіка обумовлює трирівневу архітектуру адаптивної системи, де кожен рівень реалізує специфічну функцію відповідно до типу нестационарності.

1.2.3 Інтелектуальні методи у системах автоматизації збагачення

Системи нечіткого логічного виведення дозволяють формалізувати експертні знання у вигляді бази правил «якщо — то» [36]. Проте кількість правил зростає комбінаторно зі збільшенням вхідних змінних та лінгвістичних термів. Для МС з трьома керуючими параметрами (B , ρ , Q) при 5 термах на кожну змінну кількість правил сягає $5^3 = 125$, що суттєво ускладнює повну верифікацію бази правил технологічним персоналом та обмежує практичну інтерпретованість системи.

Застосування нейронних мереж як прогнозної моделі у MPC (Neural MPC) формує задачу нелінійного програмування (NLP), де цільова функція є неопуклою. Градієнт обчислюється чисельно або через backpropagation, що не гарантує глобальної оптимальності [37]. Для процесу МС наявність множинних локальних мінімумів становить суттєвий ризик: субоптимальне рішення може призвести до порушення технологічного регламенту.

Архітектура ANFIS поєднує здатність нейронних мереж до навчання з лінгвістичною інтерпретованістю нечітких правил [27]. Проте інтерпретованість прогресивно втрачається зі збільшенням вхідних змінних, а навчені параметри функцій належності часто втрачають фізичний зміст. Як наслідок, ANFIS є «сірою скринькою», що лише частково задовольняє R3.

Незважаючи на зазначені обмеження, розглянуті інтелектуальні методи суттєво розширили можливості опису нелінійних процесів і стали важливим етапом розвитку інтелектуалізації систем керування. Спільним обмеженням цих підходів залишається відсутність формальних гарантій стійкості замкненої системи. Для нейромережевого MPC аналітичне доведення стійкості ускладнене внаслідок неопуклості задачі та відсутності замкненої форми градієнта. Нечіткі регулятори забезпечують стійкість лише для обмежених конфігурацій, що верифікуються апостеріорно. Ця прогалина є прямим аргументом для формального доведення стійкості К-MPC у розділі 3.

На відміну від інтелектуальних методів, К-MPC формує задачу квадратичного програмування (QP), яка є опуклою і має гарантований глобальний оптимум. Градієнт обчислюється аналітично, без чисельного диференціювання або зворотного поширення. Ці властивості деталізуються у §2.3.2 та §3.2.3.

1.2.4 Предиктивне керування: теорія та застосування до процесів збагачення

Метод прогнозного керування розв'язує на кожному такті k задачу оптимізації функціоналу якості [19]:

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} |y(k+i|k) - y_{\text{ref}}|_Q^2 + \sum_{j=0}^{N_c-1} |\Delta u(k+j)|_R^2 \quad (1.2)$$

з явними обмеженнями на вектори керуючих впливів u , їхні прирости Δu та вихідні змінні y . У виразі (1.2) N_p — горизонт прогнозу, N_c — горизонт керування, Q та R — матриці вагових коефіцієнтів, y_{ref} — вектор уставок, $y(k+i|k)$ — прогноз виходу на крок $k+i$, обчислений за даними на момент k . Принцип ковзного горизонту полягає в тому, що з оптимальної послідовності $\Delta u^*(k), \dots, \Delta u^*(k+N_c-1)$ реалізується лише перший крок $\Delta u^*(k)$ [19], після чого задача розв'язується заново з оновленими даними.

Метод MPC має три принципові переваги для процесу МС, що безпосередньо впливають з характеристик об'єкта (§1.1.1).

Перша перевага — багатовимірна оптимізація. На відміну від трьох незалежних ПІД-контурів, MPC оптимізує вектор керуючих впливів одночасно, враховуючи перехресні зв'язки між каналами. Це принципово важливо, оскільки зміна B впливає як на β_{Fe} , так і на ε .

Друга перевага — явне врахування обмежень. Технологічні обмеження ($\Delta B \leq 0,005$ Тл/крок, $\beta_{Fe} \geq 65\%$) входять безпосередньо у задачу оптимізації як нерівності, а не обробляються апаратними насиченнями постфактум. Це гарантує допустимість розв'язку за побудовою.

Третя перевага — превентивна стратегія. Прогноз на N_p кроків уперед дозволяє завчасно скоригувати керуючі впливи до прояву збурення на виході. Для МС з транспортним запізненням $\tau = 120\text{--}180$ с це критично, оскільки реактивний регулятор отримує інформацію про збурення із запізненням у 2–3 кроки.

Залежно від типу прогнозної моделі та оптимізаційної задачі виділяють кілька класів реалізації MPC:

1. лінійне MPC (LMPC) — прогнозна модель лінійна, задача зводиться до QR. Обмеження: адекватність лише в околі робочої точки, що недостатньо для широкого діапазону МС;

2. нелінійне MPC (NMPC) — прогнозна модель нелінійна, задача є NLP. Забезпечує адекватність у широкому діапазоні, проте обчислювально значно затратніше за лінійні реалізації [38];

3. адаптивне MPC — модель оновлюється в реальному часі на основі нових даних;

4. економічне MPC (EMPC) — оптимізація безпосередньо економічного критерію замість відхилення від уставки [19, 39].

У літературі зазначається, що LMPC забезпечує найвищу обчислювальну ефективність, проте поступається нелінійним методам за точністю у широкому діапазоні. NMPC досягає високої якості керування нелійними процесами, проте обчислювальна складність задачі NLP на кожному такті є суттєвим обмеженням для реального часу. Підхід K-MPC, що базується на послідовній лінеаризації ядерної моделі, потенційно дозволяє зберегти переваги нелінійного моделювання при формуванні опуклої задачі QR, характерної для лінійних реалізацій. Верифікація цього очікування є одним із завдань дисертації (розділ 3).

Незважаючи на методологічну відповідність, реалізація MPC для MC потребує вирішення трьох проблем:

1. нелінійність статичних характеристик: LMPC неадекватний у широкому діапазоні; NMPC обчислювально складний. Необхідна модель, що поєднує нелінійну адекватність із формуванням опуклої задачі оптимізації;

2. параметрична невизначеність: варіація мінерального складу зумовлює зміну параметрів моделі, що без адаптації призводить до різкої деградації якості керування (§1.1.1). Необхідний адаптивний механізм з диференційованою реакцією на різні типи нестационарності;

3. інтерпретованість та стійкість: промислове впровадження вимагає верифікованості моделі та формальних гарантій стійкості.

Перша проблема визначає задачу побудови ядерної прогнозної моделі (розділ 2). Друга — задачу адаптивної архітектури (§2.4). Третя — задачу доведення стійкості (розділ 3) та плану впровадження (розділ 4). Формалізація цих задач виконується у §1.3.

Систематизація методів математичного моделювання та синтезу систем керування встановила, що жоден з розглянутих підходів — параметричні, нейромережеві чи інтелектуальні — у повній мірі не задовольняє сукупності вимог R1–R3. Метод прогнозного керування є методологічно найбільш відповідним для МС; К-МРС розглядається як перспективний підхід, що потенційно поєднує якість нелінійного моделювання з обчислювальною ефективністю опуклої оптимізації. Ключовою невирішеною проблемою залишається побудова прогнозної моделі, що задовольняє R1–R3 одночасно; її розв'язання є предметом §1.3 та наступних розділів.

1.3. Постановка задачі дослідження

На підставі системного аналізу об'єкта керування та стану методів, виконаного в §§1.1–1.2, підрозділ формалізує об'єкт, предмет і мету дисертаційного дослідження, визначає чотири взаємопов'язаних задач та встановлює їхнє відображення на структуру роботи з очікуваними кількісними показниками.

1.3.1 Об'єкт, предмет, мета дослідження

На підставі проведеного аналізу встановлено чотири факти, сукупність яких обґрунтовує постановку задачі:

1. залежність $\beta_{Fe}(B)$ має S-подібний (сигмоїдний) характер, а залежність $\beta_{Fe}(\rho)$ — екстремальний з оптимумом, що залежить від типу руди (§1.1.1), що визначає суттєві нелінійності у широкому робочому діапазоні;

2. транспортне запізнення $\tau = 120\text{--}180$ с (§1.1.1) робить реактивну стратегію керування апріорно неоптимальною, оскільки інформація про збурення надходить із запізненням у 2–3 кроки;

3. стохастична мінливість мінерального складу руди (§1.1.1) зумовлює параметричну невизначеність, що не усувається апаратними засобами і потребує адаптивного механізму;

4. жоден із відомих класів моделей не забезпечує одночасного повного задоволення вимог нелінійної адекватності (R1), обчислювальної ефективності (R2) та інтерпретованості (R3), що дозволяє розглядати це як прояв системного протиріччя між зазначеними вимогами (§1.1.5).

Об'єкт дослідження — процес керування магнітною сепарацією залізорудної сировини в умовах нестаціонарності технологічних параметрів та варіабельності мінералогічного складу.

Предмет дослідження — методи побудови нелінійних прогнозних моделей на основі ядерних функцій та алгоритми предиктивного керування багатовимірними технологічними процесами збагачення з урахуванням технологічних обмежень.

Мета дослідження — розроблення методології побудови інтегрованої предиктивної системи керування процесом магнітної сепарації, що забезпечує узгоджене багатовимірне керування нелінійним об'єктом з явним дотриманням технологічних обмежень та адаптацію до стохастичної мінливості параметрів сировини.

1.3.2 Чотири задачі дослідження та їхнє відображення на розділи

Задача 1. Проаналізувати сучасний стан автоматизації процесу магнітної сепарації, систематизувати математичні моделі процесу та методи синтезу систем керування за вимогами нелінійної адекватності (R1), обчислювальної ефективності (R2) та інтерпретованості (R3), встановити їх системне протиріччя для відомих класів моделей і на цій основі

обґрунтувати доцільність предиктивного керування з прогновною моделлю на основі ядерних функцій.

Задача 2. Розробити метод побудови нелінійної прогновної моделі процесу магнітної сепарації на основі ядерних функцій, що враховує багатовимірні взаємозв'язки між технологічними параметрами в умовах обмеженої апіорної інформації та варіабельності сировини, і синтезувати на її основі алгоритм предиктивного керування з оптимізацією на скінченному горизонті, явними обмеженнями на керуючі впливи та вихідні змінні, багатокритеріальним функціоналом якості та адаптивною ідентифікацією.

Задача 3. Дослідити динамічні властивості, стійкість та робастність розробленої системи при варіаціях мінерального складу, зовнішніх збуреннях і параметричній невизначеності та експериментально верифікувати на колінеарній MiL-платформі переваги системи К-МРС над ПД-регулятором і лінійним МРС за критеріями точності, швидкодії та стійкості в умовах нестационарності.

Задача 4. Сформулювати вимоги до вимірювальної інфраструктури, обчислювальних ресурсів та структури інформаційного обміну для промислового впровадження К-МРС у складі АСУТП.

Зв'язок між задачами, розділами дисертації наведено у табл. 1.6.

Таблиця 1.6 Відповідність задач дослідження, розділів дисертації та пунктів наукової новизни

Задача	Розділ	Основний результат	Пункт новизни	Тип валідації
1	1 (§§1.1–1.3)	Система вимог R1–R3, протиріччя $R1 \cap R2 \cap R3 = \emptyset$,	—	аналіт.

Задача	Розділ	Основний результат	Пункт новизни	Тип валідації
		обґрунтування вибору К-МРС		
2	2 (§§2.1–2.4)	KRR-модель з аналітичним градієнтом, К-МРС із самозабезпеченням лінеаризації, адаптивна архітектура та стратегія консервативного керування	п. 1, 2, 3, 5	THM + EXP
3	3 (§§3.4–3.6)	Достатні умови стійкості К-МРС + порівняльний бенчмарк (6 методів $\times$ 3 сценарії)	п. 4	THM + BNK
4	4 (§§4.2–4.5)	Програмна реалізація та MiL-верифікація	—	ARCH + EXP

Задача 1 розв'язується у розділі 1: проаналізовано стан проблеми автоматизації магнітної сепарації, систематизовано моделі за вимогами R1–R3, встановлено їх системне протиріччя та обґрунтовано вибір К-МРС. Задача 2 розв'язується у розділі 2 — побудовою ядерної моделі KRR з RBF-ядром та обґрунтуванням аналітичного градієнта як критерію вибору методу, синтезом алгоритму К-МРС з перетворенням $NLP \rightarrow QP$ і побудовою трирівневої адаптивної архітектури зі стратегією консервативного керування при підвищеній невизначеності. Задача 3 розв'язується у розділі 3, де на основі класичної теорії стійкості МРС формулюються та доводяться достатні умови асимптотичної стійкості

замкненої системи К-МРС, а переваги К-МРС верифікуються порівняльним бенчмарком із шістьма методами за трьома сценаріями нестационарності. Задача 4 розв'язується у розділі 4, де розроблено план промислового впровадження, побудовано верифікаційну MiL-платформу та визначено вимоги до інфраструктури.

На підставі попереднього аналізу сформульовано такі очікувані показники:

- побудова ядерної прогнозної моделі з похибкою, що не перевищує рівня шуму вимірювань, при оптимальному підборі гіперпараметрів (§2.2.4);

- досягнення якості керування, порівнянної з NMPC, при суттєво менших обчислювальних витратах завдяки формуванню опуклої задачі QR (§3.6.2);

- забезпечення повного циклу керування у межах, що не перевищують частки такту керування $\Delta t = 60$ с, що підтверджує придатність для реального часу (§3.5.3);

- суттєве покращення якості ідентифікації та керування при застосуванні адаптивного механізму порівняно зі статичною моделлю в умовах нестационарності (§2.4.2, §3.4.3);

- формальне доведення асимптотичної стійкості замкненої системи К-МРС (§3.4.1).

Розділ 2 присвячено методології побудови ядерної прогнозної моделі та синтезу алгоритму К-МРС (задача 2). Розділ 3 містить дослідження ефективності, стійкості, робастності та порівняльний аналіз (задача 3). Розділ 4 охоплює практичну реалізацію та інтеграцію у промислову інфраструктуру (задача 4).

Постановка задачі дослідження завершує перший розділ: сформульовано об'єкт, предмет і мету, визначено чотири задачі з

однозначним відображенням на розділи та елементи новизни, встановлено очікувані кількісні показники, що підлягають верифікації у розділах 2–4.

Висновки до розділу 1

Системний аналіз процесу магнітної сепарації на барабанному сепараторі ПБМ-90/250 формалізував об'єкт керування як нелінійну МІМО-систему з трьома керуючими входами (B , ρ , Q) та двома контрольованими виходами (β_{Fe} , ϵ), для якої встановлено S-подібну залежність $\beta_{Fe}(B)$, екстремальну $\beta_{Fe}(\rho)$ з оптимумом, залежним від типу руди, транспортне запізнення $\tau = 120\text{--}180$ с (2–3 такти $T_s = 60$ с), шум вимірювань $\sigma_{\text{noise}} = 1,5$ % (β_{Fe}) і 2,0 % (ϵ) та жорсткі обмеження $\Delta B \leq 0,005$ Тл/крок і $\beta_{Fe} \geq 65$ %; порівняння шести класів математичних моделей засвідчило, що в межах розглянутих підходів вимоги нелінійної адекватності (R1), обчислювальної ефективності (R2) та інтерпретованості (R3) одночасно не задовольняються, і саме це системне протиріччя обґрунтовує потребу в принципово новому класі прогнозової моделі для контуру предиктивного керування.

Систематизація методів моделювання та синтезу встановила, що методи ядерної регресії у відтворюваному ядерному гільбертовому просторі є найперспективнішим класом для прогнозової моделі МС, оскільки KRR із RBF-ядром поєднує складність прогнозу $O(n)$ із замкненою формою розв'язку та градієнта (на відміну від GP зі складністю навчання $O(n^3)$ і прогнозу $O(n^2)$, що порушує R2, та від «чорної скриньки» нейронних мереж, які не задовольняють R3); водночас показано, що K-MPC формує опуклу задачу QP з гарантованим глобальним оптимумом замість неопуклого NLP нейромережевого MPC, а однорівневі адаптивні схеми не розрізняють аномалії та параметричний дрейф, що обґрунтовує перехід до трирівневої архітектури ідентифікації з диференційованою реакцією на типи нестационарності.

На підставі чотирьох встановлених фактів (нелінійність характеристик, неоптимальність реактивної стратегії за наявності запізнення, непереборна апаратно параметрична невизначеність та системне протиріччя R1–R3) сформульовано об'єкт, предмет і мету дослідження — розроблення методології інтегрованої предиктивної системи керування процесом магнітної сепарації — та визначено чотири взаємопов'язані задачі з однозначним відображенням на розділи 2–4 і пункти наукової новизни; для них задано очікувані кількісні показники: похибка прогнозованої моделі не вище рівня шуму вимірювань, якість керування, порівнянна з NMPC, при суттєво менших обчислювальних витратах, повний цикл керування у межах частки такту $\Delta t = 60$ с та формальне доведення асимптотичної стійкості замкненої системи.

РОЗДІЛ 2.

ЯДЕРНА ПРОГНОЗНА МОДЕЛЬ ТА ПРЕДИКТИВНЕ КЕРУВАННЯ ПРОЦЕСОМ МАГНІТНОЇ СЕПАРАЦІЇ

Аналіз стану проблеми, проведений у розділі 1, дав підстави виявити системне протиріччя між вимогами нелінійної адекватності, обчислювальної ефективності та інтерпретованості прогнозної моделі в контурі предиктивного керування процесом магнітної сепарації. Показано, що жоден із класичних підходів до побудови моделей не забезпечує одночасного повного задоволення цієї сукупності вимог у поєднанні з можливістю аналітичної лінеаризації, необхідної для перетворення задачі нелінійного програмування на задачу квадратичного програмування. У зв'язку з цим розділ 2 спрямований на подолання окресленого протиріччя шляхом побудови цілісного математичного та алгоритмічного апарату системи ідентифікації й предиктивного керування на основі методів ядерної регресії.

Логіка побудови розділу відповідає послідовності дослідницьких етапів: від обґрунтування вибору методу прогнозної моделі через формалізацію критеріїв R1–R4 та порівняльний аналіз п'яти методів ядерної регресії (§2.1) — до побудови математичного апарату ядерної гребеневої регресії (KRR), отримання аналітичного градієнта та налаштування гіперпараметрів (§2.2). На цій основі синтезовано алгоритм предиктивного керування з технологічно обґрунтованими вагами та механізмом лінеаризації (§2.3). Завершальний етап присвячено побудові трирівневої адаптивної архітектури, що забезпечує стійкість системи ідентифікації до нестационарності технологічного процесу (§2.4).

2.1. Вибір методу ядерної регресії

Установлене в §1.1.5 системне протиріччя дає підстави розглядати методи ядерної регресії як перспективний клас моделей, здатний поєднати нелінійну адекватність з аналітичною структурою. У §2.1.1 формалізовано систему критеріїв R1–R4, що визначає простір допустимих рішень для прогнозної моделі в контурі предиктивного керування; у §2.1.2 проведено порівняльний аналіз п'яти методів за цими критеріями та встановлено функціональні ролі кожного методу в загальній архітектурі системи.

2.1.1. Вимоги до прогнозної моделі в контурі MPC. Формалізація критеріїв R1–R4

Критерій R1 (нелінійна адекватність) визначається наступним чином. Процес магнітної сепарації характеризується суттєвими нелінійностями: залежність $\beta_{Fe}(B)$ має S-подібний (сигмоїдний) характер із насиченням у зоні високих індукцій, а залежність $\beta_{Fe}(\rho)$ — екстремальний характер з оптимумом ρ_{opt} , що залежить від типу руди (§1.1.1). Залежність $\varepsilon(B)$ є монотонно насичуючою з характером $1 - \exp(-c \cdot B)$. Витрата Q взаємодіє з обома залежностями, посилюючи перехресні ефекти. Кількісна оцінка деградації лінійної апроксимації при відхиленні магнітної індукції $\Delta B = \pm 0,15$ Тл від робочої точки становить 12–18 %, що є недостатнім для забезпечення якості контуру предиктивного керування. Критерій R1: прогнозна модель повинна відтворювати нелінійне відображення $f(B, \rho, Q)$ у повному робочому діапазоні змінних з похибкою, що не перевищує допустимого рівня δ_{adm} .

Критерій R2 (обчислювальна ефективність) обумовлений структурою алгоритму MPC. Алгоритм керування на кожному такті Δt виконує серію прогнозних викликів моделі для побудови траєкторії на горизонті прогнозу. При розмірності задачі $N_p = 10\text{--}20$ і кількості прогнозних викликів $N_{pred} = 20\text{--}50$ загальна кількість викликів за один такт становить від 200 до 1000.

Слід зазначити, що N_{pred} — це кількість прогнозних викликів моделі, яка не збігається з кількістю ітерацій QR-розв'язувача (1–5 при теплому старті, §3.3.2): прогнозні виклики виконуються до формування задачі QR, а ітерації розв'язувача — після. За такту дискретизації $\Delta t \sim 30\text{--}120$ с усі виклики повинні завершитись із суттєвим запасом часу. Критерій R2 вимагає, щоб складність одного прогнозного виклику становила $O(n)$ при обсязі навчальної вибірки $n = 500\text{--}1500$.

Критерій R3 (інтерпретованість параметрів) відображає вимоги промислової експлуатації. В її умовах параметри прогнозної моделі повинні мати зрозумілий зв'язок із фізичними характеристиками процесу, що забезпечує часткову верифікацію моделі інженерно-технічним персоналом та підвищує довіру оперативного персоналу до рекомендацій системи. Критерій R3 вимагає наявності параметрів із фізичною інтерпретацією: ширина ядра σ пов'язана з масштабом чутливості, а регуляризаційний параметр λ — з відношенням сигнал/шум.

Критерій R4 (аналітична лінеаризація) є специфічним для контуру MPC. Інтеграція нелінійної моделі в контур предиктивного керування потребує перетворення задачі нелінійного програмування (NLP) у задачу квадратичного програмування (QP) на кожному такті [19]. Це перетворення базується на лінеаризації моделі навколо поточної робочої точки, що вимагає обчислення якобіана $\partial f / \partial u$. Критерій R4: прогнозна модель повинна мати замкнений аналітичний вираз для градієнта $\partial f / \partial u$, що забезпечує коректне перетворення $NLP \rightarrow QP$ без чисельного диференціювання. Цей критерій відсутній у відомих класифікаціях методів ядерної регресії, де порівняння проводиться за R1–R3 [32], тоді як R4 не розглядається як окремий системоутворюючий критерій.

Зведені визначення критеріїв подано у табл. 2.1.

Таблиця 2.1 Критерії вибору прогновної моделі для контуру MPC

Критерій	Визначення	Формальна умова
R1	Нелінійна адекватність	Похибка $\leq \delta_{adm}$ у повному робочому діапазоні $f(B, \rho, Q)$
R2	Обчислювальна ефективність	Складність прогнозу $O(n)$, $n = 500-1500$
R3	Інтерпретованість параметрів	Параметри $\leftrightarrow$ фізичні характеристики процесу
R4	Аналітична лінеаризація	Замкнений вираз $\partial f / \partial u$ для перетворення $NLP \rightarrow QP$

2.1.2. Порівняльний аналіз методів ядерної регресії за критеріями R1–R4

Багатошаровий перцептрон (MLP) є універсальним апроксиматором [31], що забезпечує виконання R1 за умови достатньої кількості нейронів та адекватного навчання. Обчислювальна ефективність прогнозу (R2) є задовільною: складність прямого проходу $O(L \cdot d^2)$ при малій кількості шарів L [40] порівнянна з $O(n)$ для типових архітектур. Проте MLP не задовольняє критерію R3: ваги прихованих шарів не мають безпосередньої фізичної інтерпретації. Щодо критерію R4: градієнт MLP обчислюється через backpropagation, проте він є замкненим лише у термінах внутрішніх активацій, а не безпосередньо у термінах вхідних змінних процесу, що ускладнює побудову якобіана для задачі QP. Відтак, MLP не включається до архітектури системи. Разом з тим нейромережеві моделі суттєво розширили можливості апроксимації нелінійних технологічних залежностей і залишаються ефективним інструментом для задач, де інтерпретованість параметрів не є критичною вимогою.

Гауссівський процес (GP) є байєсівським методом ядерної регресії, що забезпечує нелінійну апроксимацію (R1) та інтерпретованість гіперпараметрів (R3): ширина ядра σ і дисперсія шуму σ^2_n мають ясний фізичний зміст. Проте GP не задовольняє критерію R2: складність навчання $O(n^3)$ і прогнозу $O(n^2)$ є надмірними для реального часу [33] при $n = 500$ – 1500 . Водночас GP володіє унікальною властивістю — оцінкою апостеріорної дисперсії $\sigma^2_{GP}(u^*)$, що кількісно характеризує невизначеність прогнозу. Ця властивість визначає функціональну роль GP як наглядного рівня в адаптивній архітектурі (§2.4.5), де обчислювальні витрати є прийнятними через використання спільної матриці Грама KRR.

Метод опорних векторів (SVR) забезпечує нелінійну апроксимацію (R1) і характеризується розрідженістю розв'язку. Проте SVR має три гіперпараметри (C, ε, σ) порівняно з двома (σ, λ) у KRR, що збільшує простір пошуку при налаштуванні. Ключовим обмеженням є наявність ε -нечутливої зони: функція втрат негладка у точці $|y - f(x)| = \varepsilon$ [41], що спричиняє негладкість прогнозної функції та ускладнює аналітичну лінеаризацію (R4). Натомість ε -нечутливість природно формує зону «нормальних» значень, за межами якої спостереження класифікуються як аномальні, що визначає роль SVR як компонента фільтрації аномальних вимірювань (§2.4.3).

Найменшоквадратична машина опорних векторів (LS-SVM) задовольняє критеріям R1, R2 та R4, оскільки розв'язок зводиться до системи лінійних рівнянь з матрицею Грама. Проте LS-SVM є математично еквівалентним KRR: обидва методи розв'язують задачу мінімізації квадратичних втрат з Тихоновською регуляризациєю у відтворюваному ядерному гільбертовому просторі (RKHS), а система KKT для LS-SVM є розширеним формулюванням стандартної задачі KRR. З огляду на алгебраїчну еквівалентність, введення LS-SVM поряд з KRR є надлишковим. Слід зазначити, що LS-SVM є важливим етапом розвитку

ядерних методів машинного навчання, оскільки саме у роботах було систематизовано зв'язок між SVM-формалізмом та регуляризацією Тихонова [42].

Ядерна гребенева регресія (KRR) задовольняє всім чотирьом критеріям одночасно. R1: KRR з RBF-ядром є універсальним апроксиматором у відтворюваному ядерному гільбертовому просторі [43]. R2: навчання потребує $O(n^3)$ операцій як одноразова операція поза контуром реального часу; прогноз складає $O(n)$ [32], що відповідає вимозі R2 при $n = 500\text{--}1500$. R3: ширина ядра σ інтерпретується як «радіус чутливості» в нормалізованому просторі; регуляризаційний параметр λ пов'язаний з відношенням дисперсії шуму до дисперсії сигналу ($\lambda \sim \sigma^2_{\eta}/\sigma^2_y$) [33]. R4: RBF-ядро належить класу C^∞ , що гарантує існування замкненого аналітичного градієнта $\partial f/\partial u$ [44] (формула наведена у §2.2.2), обчислюваного за $O(n \cdot d)$ без чисельного диференціювання.

Результати порівняльного аналізу зведено у табл. 2.2.

Таблиця 2.2 Порівняльний аналіз методів ядерної регресії за критеріями R1–R4

Метод	R1	R2	R3	R4	Роль в архітектурі
MLP	✓	✓	✗	~	Не включається
GP	✓	✗	✓	~	Наглядний рівень (§2.4.5)
SVR	✓	~	~	~	Фільтр аномалій (§2.4.3)
LS-SVM	✓	✓	~	✓	Не включається (надлишковий)

Метод	R1	R2	R3	R4	Роль в архітектурі
KRR	✓	✓	✓	✓	Основна прогнозна модель MPC

Аналіз табл. 2.1 дозволяє сформулювати наступний висновок:

Критерій вибору ядерної моделі аналітичного градієнта KRR+RBF як необхідна умова $NLP \rightarrow QP$. Серед розглянутих методів ядерної регресії (MLP, GP, SVR, LS-SVM, KRR) лише KRR з RBF-ядром задовольняє одночасно всім чотирьом критеріям R1–R4. Критерій R4 (наявність замкненого аналітичного градієнта $\partial f/\partial u$) є необхідною умовою коректного перетворення задачі нелінійного програмування на задачу квадратичного програмування в контурі предиктивного керування.

Обґрунтування. Виконання R1–R3 для KRR з RBF-ядром є загальновідомим результатом теорії відтворюваних ядерних гільбертових просторів. Виконання R4 забезпечується приналежністю RBF-ядра до класу S_{∞} : аналітичний градієнт існує, є замкненим і обчислюється за $O(n \cdot d)$ (формальний вигляд наведено у §2.2.2). Невиконання принаймні одного з критеріїв R1–R4 для кожного з альтернативних методів встановлено у проведеному вище аналізі: MLP — R3X; GP — R2X; SVR — R4 ускладнений через негладкість ε -зони; LS-SVM — алгебраїчно еквівалентний KRR.

Принциповим методологічним положенням є те, що жоден метод не відхиляється безумовно. Кожен із розглянутих методів має специфічні властивості, які визначають його функціональну роль у загальній архітектурі адаптивної системи ідентифікації. SVR, завдяки ε -нечутливій зоні, є природним детектором аномалій і отримує роль фільтра аномальних вимірювань (§2.4.3). GP, завдяки апостеріорній оцінці дисперсії, виконує функцію наглядача невизначеності, забезпечуючи адаптивне налаштування

матриці штрафних ваг $R(k)$ (§2.4.5). KRR, як єдиний метод із повним набором R1–R4, стає основною прогножною моделлю MPC. Цей принцип функціонально-ролевого розподілу, в якому три методи ядерної регресії (SVR, KRR, GP) об'єднано через спільний відтворюваний ядерний простір $\mathcal{H}_k$ та єдине RBF-ядро, становить зміст елемента наукової новизни — принципу функціонально-ролевого розподілу, в якому SVR виконує роль фільтра аномалій, KRR — прогнозної моделі MPC, а GP — наглядача невизначеності.

Встановлено (§2.1.2), що KRR з RBF-ядром є єдиним методом ядерної регресії, який задовольняє системі критеріїв R1–R4, що обґрунтовує його вибір як основної прогнозної моделі в контурі MPC. Функціонально-ролевий розподіл визначає місце SVR та GP в адаптивній архітектурі. Побудову математичного апарату KRR та отримання аналітичного виразу для градієнта $\partial f / \partial u$ викладено у §2.2.

2.2. Математичний апарат KRR та ідентифікація моделі

Вибір KRR з RBF-ядром, обґрунтований у §2.1, потребує формалізації повного математичного апарату: від постановки задачі ідентифікації у відтворюваному ядерному гільбертовому просторі (RKHS) до процедури налаштування гіперпараметрів. У §2.2.1 формалізовано задачу та декомпозицію двовихідної моделі; у §2.2.2 обґрунтовано вибір RBF-ядра та отримано аналітичний градієнт (§2.2.2); у §2.2.3 визначено структуру навчальної вибірки; у §2.2.4 застосовано аналітичну LOO-крос-валідацію для підбору гіперпараметрів.

2.2.1. Постановка задачі ідентифікації та формалізація KRR

Задачу ідентифікації процесу магнітної сепарації сформульовано як побудову нелінійного відображення від вектора керуючих впливів до

вектора вихідних технологічних змінних. Простір змінних визначається наступним чином:

$$u = (B, \rho, Q)^T \in \mathbb{R}^3, \quad (2.1)$$

$$y = (\beta_{Fe}, \varepsilon)^T \in \mathbb{R}^2, \quad (2.2)$$

де u — вектор керуючих впливів: магнітна індукція B (Тл), густина пульпи ρ (кг/м³), об'ємна витрата Q (м³/год); y — вектор вихідних змінних: вміст заліза у концентраті β_{Fe} (%) та коефіцієнт вилучення ε (%).

Прийняте відображення $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ є квазістатичним — алгебраїчним зв'язком вхід–вихід без явної динаміки стану (П-2, Додаток А). Адекватність такого вибору забезпечується співвідношенням характерних часів: такт керування $T_s = 60$ с (§4.1.1) суттєво перевищує постійну часу перехідних процесів усередині барабанного сепаратора ($\tau_{бар} \approx 5\text{--}10$ с), тому за один такт процес встигає досягти квазістаціонарного стану. Динаміка процесу враховується опосередковано — через рецидивний горизонт MPC ($N_p = 10$ кроків, §3.1) та компенсацію збурень через нев'язку $e(k) = y_{meas}(k) - \hat{y}(k|k-1)$ (§3.2.2), що забезпечує астатизм замкненої системи; транспортне запізнення $\tau = 120\text{--}180$ с компенсується горизонтом прогнозу $N_p \geq (T + \tau)/T_s \approx 8$ (§4.1.1). Розширення підходу на динамічні KRR-моделі простору стану є напрямом подальших досліджень.

Вектор керуючих впливів обмежено трьома оперативно керованими параметрами сепаратора ПБМ-90/250: B , ρ , Q (П-5, Додаток А). Додаткові фактори — крупність помелу, вміст заліза у живленні, температура пульпи — змінюються на масштабах часу від годин до діб і враховуються опосередковано через адаптивну архітектуру SVR + KRR + GP (§2.4): повільний дрейф відстежується ковзним вікном, виявлення виходу за межі навчального домену забезпечується GP-наглядачем. Обчислювальна складність аналітичного градієнта $O(n \cdot d)$ є лінійною за d , тому розширення вектора входів є прямим масштабуванням методу.

Навчальна вибірка формується як множина пар «вхід — вихід»:

$$D = \{(u_i, y_i)\}_{i=1}^n, y_i = f(u_i) + \eta_i, \eta \sim N(0, \sigma_\eta^2 \cdot I_2), \quad (2.3)$$

де $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ — невідоме нелінійне відображення процесу магнітної сепарації; η_i — вектор адитивного гауссівського шуму з нульовим математичним сподіванням та діагональною коваріаційною матрицею.

Задачу ідентифікації відображення $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ декомпозовано на дві незалежні скалярні задачі:

$$\beta_{Fe}(u) = f_1(u) + \eta_1, \quad (2.4)$$

$$\varepsilon(u) = f_2(u) + \eta_2, \quad (2.5)$$

де $f_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ та $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ — скалярні функції, η_1 та η_2 — незалежні компоненти шуму. Обґрунтування декомпозиції базується на тому, що крос-кореляція між залишковими шумами η_1 та η_2 не несе конструктивної інформації для побудови регресійної моделі: фізичні механізми формування β_{Fe} та ε у барабанному сепараторі ПБМ-90/250 є різними (селективне захоплення магнітних частинок та повнота їх вилучення з потоку відповідно), і кореляція вихідних змінних визначається спільними входами u , а не шумовими компонентами. Відтак, декомпозиція МІМО-задачі на дві скалярні МІСО-задачі є коректною і не призводить до втрати інформації.

Прийнята декомпозиція виходів становить методологічне припущення (П-4, Додаток А): крос-кореляція між каналами β_{Fe} та ε враховується опосередковано через спільні входи u та через вагову матрицю $Q = \text{diag}(q_\beta, q_\varepsilon)$ у функціоналі MPC, а не через спільну ймовірнісну модель. Розширення підходу на мультивихідну KRR зі спільним ядром є можливим напрямом подальших досліджень.

Формалізацію KRR у RKHS виконано наступним чином. Кожна зі скалярних задач (2.4)–(2.5) розв'язується методом ядерної гребеневої регресії. Відповідно до теорії відтворюваних ядерних гільбертових

просторів, розв'язок задачі регуляризації Тихонова у RKHS $\mathcal{H}_k$ [32] шукається у вигляді мінімізації функціонала:

$$J(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - f(u_i))^2 + \lambda \|f\|_{\mathcal{H}}^2, \quad (2.6)$$

де перший член — емпірична похибка; $\lambda > 0$ — параметр регуляризації; $\|f\|_{\mathcal{H}}^2$ — квадрат норми функції у RKHS, що контролює складність моделі.

Згідно з теоремою репрезентант, мінімізатор функціонала (2.6) має представлення [45]:

$$f^*(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i k(u_i, u), \quad (2.7)$$

де $k: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ — ядерна функція (конкретний вибір обґрунтовано у §2.2.2); α_i — коефіцієнти розкладу. Підстановка (2.7) у (2.6) та прирівнювання градієнта до нуля дає замкнений розв'язок:

$$\alpha^* = (K + \lambda I_n)^{-1} y, \quad (2.8)$$

де $K \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — матриця Грама з елементами $K_{ij} = k(u_i, u_j)$; I_n — одинична матриця розмірності $n \times n$; $y \in \mathbb{R}^n$ — вектор вихідних значень відповідної скалярної задачі.

Для двовихідної моделі прогнозні функції мають вигляд:

$$f_1(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(1)} k(u_i, u^*), \quad f_2(u) = \sum_{i=1}^n \alpha_i^{(2)} k(u_i, u^*) \quad (2.9)$$

де $\alpha_i^{(1)}$ та $\alpha_i^{(2)}$ — коефіцієнти розкладу для моделей β_{Fe} та ε відповідно, обчислені за (2.8) з відповідними векторами $y^{(1)}$ та $y^{(2)}$. Обидві моделі використовують спільну матрицю Грама K : інверсія $(K + \lambda I_n)^{-1}$ виконується один раз для обох виходів.

Щодо обчислювальної складності, навчання KRR потребує $O(n^3)$ операцій для обчислення $(K + \lambda I_n)^{-1}$. Ця операція є одноразовою (або виконується при оновленні ковзного вікна, §2.4.4): при $W = 500$ час

інкрементного оновлення становить приблизно 46 мс, первинне batch-навчання — приблизно 232 мс, що значно менше за такт дискретизації $\Delta t = 60$ с (§2.4.4). Прогноз за формулою (2.9) складає $O(n)$ операцій [32], що відповідає вимозі R2 (§2.1.1).

Коефіцієнти α_i у розкладі (2.7) мають фізичну інтерпретацію: знак та величина α_i відображають «вплив» навчальної точки u_i на прогноз. Великі додатні значення α_i вказують на точки, що підвищують прогнозоване значення виходу; від'ємні — на точки, що знижують його. Це забезпечує часткову верифікацію моделі інженерним персоналом, що обумовлює інтерпретованість коефіцієнтів (R3).

2.2.2. Вибір та обґрунтування ядерної функції. Аналітичний градієнт KRR

Ядерну функцію обрано у вигляді гауссівської радіальної базисної функції:

$$k(u, u') = \exp\left(-\frac{|u-u'|^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.10)$$

$\sigma > 0$ — ширина ядра (параметр масштабу); $\|\cdot\|$ — евклідова норма у $\mathbb{R}^3$. Вибір RBF-ядра обумовлено трьома властивостями.

По-перше, позитивна визначеність. RBF-ядро є позитивно визначеним на $\mathbb{R}^3$ при будь-якому $\sigma > 0$, що є наслідком теореми Бохнера: перетворення Фур'є гауссівської функції є невід'ємним [46], що гарантує існування та єдиність RKHS $\mathcal{H}_k$. Для перевірки позитивної визначеності матриці Грама на навчальній вибірці обчислено мінімальне власне значення: $\lambda_{\min}(K) = 6.905 \times 10^{-9} > 0$ при $\sigma^* = 0.65$ нормалізованих одиниць (середнє значення діапазону $[0.3; 1.0]$, $n = 500$, М-руда). Строга додатність $\lambda_{\min}(K)$ підтверджує невиродженість задачі та коректність інверсії $(K + \lambda I_n)^{-1}$.

По-друге, нескінченна диференційовність. RBF-ядро (2.10) належить класу C^∞ як композиція експоненціальної функції та квадратичної форми [44], що гарантує існування похідних будь-якого порядку для прогнозної функції $f^*(u)$ і є необхідною передумовою для аналітичної лінеаризації.

По-третє, локальність. Значення $k(u, u')$ монотонно спадає з відстанню $\|u - u'\|$ і практично дорівнює нулю при $\|u - u'\| \gg \sigma$. Параметр σ інтерпретується як «радіус чутливості» у нормалізованому просторі: навчальні точки, розташовані далі ніж $2-3\sigma$ від точки прогнозу, не здійснюють суттєвого впливу на результат.

Вибір RBF як єдиного типу ядра є методологічним припущенням дослідження (П-9, Додаток А). Порівняння з іншими позитивно визначеними ядрами (Матерна, поліноміальне, раціональне квадратичне) не виконувалось, оскільки RBF одночасно задовольняє три ключові вимоги — наявність замкненого аналітичного градієнта (формула 2.11), нескінченну диференційовність C^∞ та єдиний інтерпретований гіперпараметр σ . Експериментальне порівняння класів ядер є напрямом подальших досліджень.

Ключовою перевагою KRR з RBF-ядром є замкнений аналітичний вираз для градієнта прогнозної функції. Диференціювання (2.7) з урахуванням (2.10) дає:

$$\frac{\partial f^*}{\partial u} = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n \alpha_i, k(u_i, u), (u - u_i) \quad (2.11)$$

Вираз (2.11) є центральним теоретичним результатом, що забезпечує виконання критерію R4 (§2.1.1). Для кожної зі скалярних моделей $f_1(\beta_{Fe})$ та $f_2(\epsilon)$ градієнт обчислюється незалежно з відповідними коефіцієнтами $\alpha^{(1)}$ та $\alpha^{(2)}$, формуючи яacobіан розмірності 2×3 .

Аналітичний градієнт (2.11) характеризується чотирма властивостями:

1. *аналітичність* — вираз є точним, не містить наближень і не потребує вибору кроку дискретизації;

2. *замкненість* — градієнт виражений безпосередньо через параметри навченої моделі (α_i , u_i , σ) та вхідну точку u ;

3. *ефективність* — складність обчислення $O(n \cdot d)$, що при $n = 500$ та $d = 3$ відповідає часу приблизно 0.13 мс;

4. *гладкість* — градієнт належить класу C^∞ , що гарантує гладкість якобіана та строгу опуклість QP-задачі (§2.3.2).

Альтернативою аналітичному градієнту є числове диференціювання методом центральних різниць (FD). Порівняння двох підходів наведено у табл. 2.3.

Таблиця 2.3 Порівняння аналітичного та числового методів обчислення градієнта

Характеристика	Аналітичний	Числовий (FD)	Примітка
Складність	$O(n \cdot d)$	$O(2d \cdot n \cdot d)$	FD: $2d$ викликів f^*
Час ($d = 3$, $n = 500$)	$t_{\text{anal}} \approx 0.13$ мс	$t_{\text{num}} \approx 0.78$ мс	$t_f \approx 0.13$ мс (один виклик f^*)
Прискорення	—	—	$t_{\text{num}} / t_{\text{anal}} = 2d = 6 \times$
Відносне відхилення	еталон	$\ \nabla f_{\text{FD}} - \nabla f_{\text{anal}}\ / \ \nabla f_{\text{anal}}\ $	$< 10^{-6}$ при $h = 10^{-7}$
Гладкість	C^∞ (гарантовано)	Залежить від h	Аналіт. $\rightarrow \lambda_{\min}(H) \geq \lambda_{\min}(R) > 0$

Числовий метод центральних різниць потребує $2d = 6$ незалежних викликів f^* [47] (по два на кожен компоненту: $f^*(u + h \cdot e_j)$ та $f^*(u - h \cdot e_j)$, $j = 1, 2, 3$). Аналітичний метод обчислює ∇f^* за один прохід по навчальній

вибірці. Відношення $t_{\text{num}} / t_{\text{anal}} = 2d$ є структурною константою, що не залежить від апаратної реалізації.

Вплив аналітичного градієнта на опуклість QP-задачі є наступним. Аналітичний градієнт забезпечує точну побудову матриці предикції Θ для задачі квадратичного програмування (§2.3.2). Оскільки гессіан QP має вигляд $H = \Theta^T Q \Theta + R$, де $R \succ 0$, мінімальне власне значення задовольняє нерівність $\lambda_{\min}(H) \geq \lambda_{\min}(R) > 0$. Строга опуклість QP гарантована аналітично і не залежить від якості числового наближення градієнта — на відміну від підходів із числовим диференціюванням, де похибка у Θ може порушити позитивну визначеність H при малих $\lambda_{\min}(R)$.

На основі проведеного аналізу сформульовано наступне твердження, що завершує обґрунтування елемента наукової новизни — критерію аналітичного градієнта KRR з RBF-ядром як необхідної умови коректного перетворення $NLP \rightarrow QP$ у контурі прогностного керування.

Аналітичний градієнт KRR+RBF. Для KRR-моделі з RBF-ядром (2.10) аналітичний градієнт прогнозової функції за вектором керуючих впливів має вигляд (2.11), є замкненим, обчислюється за $O(n \cdot d)$ та належить класу C^∞ . Ця властивість є необхідною умовою коректного перетворення $NLP \rightarrow QP$ у контурі предиктивного керування (§2.3.2) і не має аналогів серед альтернативних методів: MLP не забезпечує замкненого градієнта у термінах вхідних змінних процесу, а SVR — гладкості через наявність ε -нечутливої зони.

Обґрунтування. Замкненість та аналітичність виразу (2.11) є безпосереднім наслідком диференціювання розкладу (2.7) за u з урахуванням C^∞ -гладкості RBF-ядра (2.10). Складність $O(n \cdot d)$ впливає зі структури суми: n доданків, кожен з яких потребує $O(d)$ операцій для обчислення $k(u_i, u) \cdot (u - u_i)$. Порівняння з числовим методом (табл. 2.3) підтверджує шестикратне прискорення при відносному відхиленні $< 10^{-6}$.

Належність до C^∞ гарантує $\lambda_{\min}(H) \geq \lambda_{\min}(R) > 0$, що є необхідною умовою єдиності глобального мінімуму QP.

2.2.3. Навчальна вибірка: джерело, структура, стратегія розбивки

Навчальну вибірку сформовано за допомогою верифікованого параметричного симулятора процесу магнітної сепарації. Модель-генератор відтворює дві ключові нелінійності об'єкта:

$$\beta_{Fe}(B, \rho, Q) = \frac{\beta_{max}}{1 + \exp(-k \cdot (B - B_0))} - c_1 \cdot (\rho - \rho_{opt})^2 - c_3 \cdot Q + \eta_\beta \quad (2.12)$$

$$\varepsilon(B, \rho, Q) = \varepsilon_{max} \cdot G(\rho) \cdot H(Q) \cdot (1 - \exp(-c_2 \cdot B)) + \eta_\varepsilon \quad (2.13)$$

перший вираз відтворює S-подібну (сигмоїдну) залежність $\beta_{Fe}(B)$ (§2.3); β_{max} , k , B_0 — параметри сигмоїди; c_1 — коефіцієнт екстремальної залежності $\beta_{Fe}(\rho)$ з оптимумом ρ_{opt} ; c_3 — коефіцієнт впливу витрати; $G(\rho)$, $H(Q)$ — мультиплікативні компоненти залежностей ε від густини та витрати відповідно.

Використання симулятора як джерела навчальних даних та напівемпіричний характер моделі-генератора становлять два пов'язані методологічні припущення дослідження (П-1, П-6, Додаток А). Симулятор забезпечує контрольовану варіацію параметрів процесу, відтворюваність експериментів (seed (42), 30 незалежних запусків) та можливість ізольованого дослідження впливу окремих факторів. Параметри генератора калібровано за галузевими даними п'яти ГЗК Кривбасу (§4.3.2), що забезпечує відтворення характерних типів нелінійностей реального процесу. Кількісні оцінки точності та економічної ефективності, отримані на синтетичних даних, визначають межі інтерпретації результатів дослідження та потребують подальшої перевірки на промислових даних на фазі Offline-ідентифікації (§4.5.1).

Діапазони навчальної вибірки встановлено рівними паспортним діапазонам барабанного сепаратора ПБМ-90/250 [2, 3] (табл. 2.4). За такого

підходу будь-який промисловий режим є інтерполяцією, а не екстраполяцією навченої KRR-моделі, що забезпечує виконання умови R1 (§2.1.1).

Таблиця 2.4 Робочі діапазони змінних (ПБМ-90/250)

Змінна	Діапазон	Номінал	Одиниця	Примітка
V	[0.08; 0.18]	0.12–0.15	Тл	Паспортний діапазон ПБМ-90/250
ρ	[1200; 1600]	1350–1450	кг/м ³	Водно-рудна суспензія Кривбасу
Q	[200; 600]	350–450	м ³ /год	Продуктивність секції
β_{Fe}	[60; 72]	65–68	%	Вміст Fe; $\beta_{\text{Fe},\text{min}} = 65$ % (регламент)
ε	[55; 95]	78–85	%	Коефіцієнт вилучення

Обсяг навчальної вибірки становить $n = 500$ спостережень. Нормалізацію вхідних та вихідних змінних виконано за методом z-score [48], що забезпечує рівноправний внесок усіх компонент вектора u у матрицю Грама K незалежно від фізичних одиниць. Рівень шуму у нормалізованих координатах становить $\sigma_{\eta} \approx 0.1$ нормалізованих одиниць. Прийнята модель шуму — адитивна, гаусівська, з некорельованими компонентами (П-3, Додаток А) — відповідає паспортним характеристикам XRF-аналізаторів ($\sigma_{\text{noise}}(\beta_{\text{Fe}}) = 1.5$ %, $\sigma_{\text{noise}}(\varepsilon) = 2.0$ %); робастність системи при відхиленнях від цієї моделі забезпечується GP-наглядачем (§2.4.5), який адаптує матрицю $R(k)$ при зростанні апостеріорної невизначеності. Априорна оцінка параметра регуляризації $\lambda \sim \sigma_{\eta}^2 / \sigma_y^2 \approx 0.01$ використовується як початкове наближення для сіткового пошуку (§2.2.4).

Вибірку розділено на навчальну (80 %, 400 спостережень) та тестову (20 %, 100 спостережень) частини. Для крос-валідації застосовано time-series split ($k = 5$), що зберігає хронологічну структуру даних та запобігає оптимістичному зміщенню оцінки [49], характерному для випадкової розбивки (детальне порівняння з k -fold CV наведено у §2.2.4).

Обсяг навчальної вибірки $n = 500$ та розмір ковзного вікна $W = 500$ (§2.4.4) прийнято фіксованими константами без побудови кривих навчання (П-8, Додаток А); адекватність обраного значення підтверджується якістю моделі ($\text{RMSE}_{\text{test}}$ близько до теоретичної межі, обумовленої рівнем шуму) та обчислювальним запасом (час інкрементного оновлення ≈ 46 мс $\ll \Delta t = 60$ с, §2.4.4). Систематичне дослідження залежності якості моделі від n та адаптивне визначення $W(k)$ є напрямом подальших досліджень.

2.2.4. Вибір гіперпараметрів: аналітична LOO-крос-валідація

Аналітична формула LOO-похибки має наступний вигляд. Для KRR з матрицею Грама K та параметром регуляризації λ LOO-похибка обчислюється аналітично через матрицю згладжування:

$$E_{\text{LOO}}(\sigma, \lambda) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{y_i - f^*(u_i)}{1 - H_{ii}} \right)^2} \quad (2.14)$$

де $H = K \cdot (K + \lambda I)^{-1}$ — матриця згладжування розмірності $n \times n$; H_{ii} — діагональні елементи H . Вираз (2.14) є точним і базується на алгебраїчній тотожності hat-matrix shortcut: виключення i -ї точки еквівалентно поправці прогнозу через H_{ii} [50], що усуває необхідність n повторних навчань моделі.

Спільний підбір (σ^*, λ^*) виконано шляхом мінімізації E_{LOO} на двовимірній сітці: 10 значень $\sigma \times 10$ значень $\lambda = 100$ комбінацій. Для кожної комбінації інверсія $(K + \lambda I)^{-1}$ обчислюється один раз, після чого діагональ H та LOO-похибка визначаються без додаткових інверсій. Медіана часу

повного перебору 100 комбінацій становить приблизно 3.2 с. Ландшафт LOO-похибки на сітці (σ, λ) зображено на рис. 2.1.

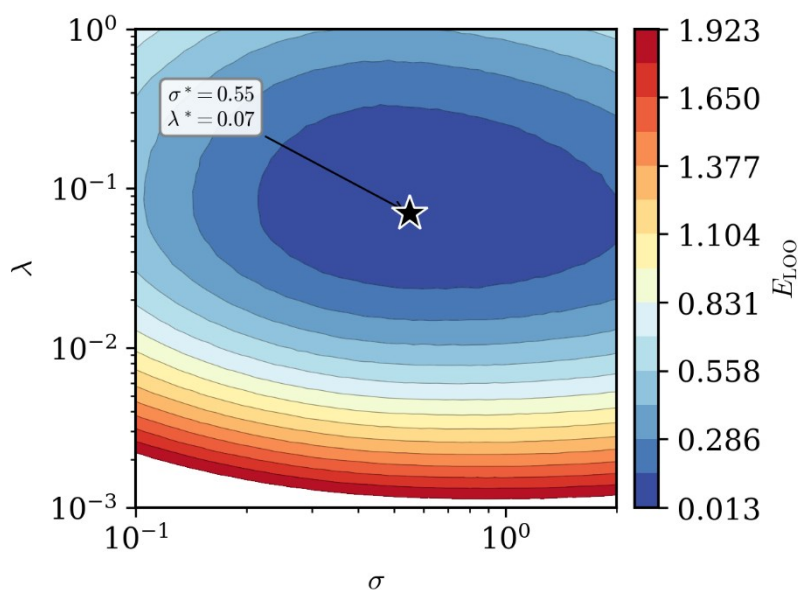


Рис. 2.1 Поверхня LOO-похибки $E_{LOO}(\sigma, \lambda)$ з позначенням оптимуму

Перевагу аналітичної LOO перед альтернативними методами продемонстровано у табл. 2.5.

Таблиця 2.5 Порівняння методів крос-валідації ($n = 500$, 100 комбінацій)

Характеристика	Аналітична LOO	k-fold CV ($k = 5$)	Наївна LOO
Складність	$O(n^3)$	$O(k \cdot n^3)$	$O(n^4)$
Час на 100 комбінацій	~3.2 с	~16 с	~1325 с
Прискорення відн. наївної	~414×	~83×	1×
Зміщення для часових рядів	Мінімальне	Існує (random split)	Мінімальне

Аналітична LOO забезпечує прискорення приблизно у 414 разів порівняно з наївною LOO та приблизно у 5 разів порівняно з k-fold CV ($k =$

5). Суттєвою якісною перевагою є відсутність зміщення для часових рядів: випадкова розбивка k-fold порушує хронологічну структуру даних, тоді як аналітична LOO використовує кожну точку як тестову, зберігаючи повний обсяг навчальної вибірки ($n - 1$). Валідаційна вибірка не виділяється окремо: LOO замінює її функцію при підборі (σ^* , λ^*).

Оптимальні значення гіперпараметрів та показники якості зведено у табл. 2.6.

Таблиця 2.6 Результати сіткового пошуку гіперпараметрів KRR

Параметр	Значення	Узгодженість
σ^* (оптимальне)	[0.3; 1.0] норм. од.	$\approx 0.01\text{--}0.02$ Тл фіз. од. по В
λ^* (оптимальне)	[0.04; 0.11]	Узгоджено з $\sigma_\eta \approx 0.1$
$\text{RMSE}_{\text{test}} \beta_{\text{Fe}}$	0.07–0.10 норм. од.	$\approx (1.0\text{--}1.5) \cdot \sigma_\eta$
$\text{RMSE}_{\text{test}} \varepsilon$	0.09–0.12 норм. од.	ε апроксимується менш точно
	$\text{RMSE}_{\text{test}} - E_{\text{LOO}}$	/ E_{LOO}

Обґрунтування досягнутого рівня RMSE є наступним. При оптимальних гіперпараметрах похибка KRR обмежена знизу рівнем шуму $\sigma_\eta \approx 0.1$ нормалізованих одиниць: теоретично досяжна нижня межа $\text{RMSE} \approx \sigma_\eta$ відповідає ідеальній апроксимації детермінованої компоненти $f(u)$ без перенавчання на шумі. Реалістичний $\text{RMSE}_{\text{test}} \approx (1.0\text{--}1.5) \cdot \sigma_\eta \approx 0.07\text{--}0.15$ нормалізованих одиниць з урахуванням обмеженості вибірки $n = 500$ та компромісу між зміщенням і дисперсією [48]. Модель β_{Fe} апроксимується дещо точніше за модель ε , що пояснюється ширшим динамічним діапазоном коефіцієнта вилучення (55–95 % проти 60–72 % для β_{Fe} , табл. 2.4). Розбіжність між LOO-оцінкою та тестовою похибкою не перевищує 10 %, що підтверджує адекватність LOO як критерію підбору гіперпараметрів.

Узгодженість оптимального λ^* з фізичними параметрами підтверджується наступним чином. Діапазон $\lambda^* = [0.04; 0.11]$ узгоджується з апріорною оцінкою $\lambda \sim \sigma_{\eta}^2 / \sigma_y^2 \approx 0.01$ (§2.2.3) з точністю до порядку величини. Зміщення оптимуму вгору відносно апріорної оцінки пояснюється тим, що LOO-критерій враховує не лише рівень шуму, а й складність моделі: надмірно малі λ призводять до перенавчання, яке LOO виявляє через великі значення $(1 - H_{ii})^{-1}$ для впливових точок.

Побудована та налаштована KRR-модель з оптимальними гіперпараметрами $\sigma^* \in [0.3; 1.0]$ та $\lambda^* \in [0.04; 0.11]$ задовольняє системі критеріїв R1–R4 та є основою для синтезу алгоритму предиктивного керування, що викладено у §2.3.

2.3. Алгоритм предиктивного керування на основі KRR

KRR-модель $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, побудована у §2.2, є прогнозним компонентом контуру предиктивного керування. У §2.3.1 сформульовано задачу оптимального керування з технологічно обґрунтованими матрицями вагових коефіцієнтів; у §2.3.2 виконано лінеаризацію нелінійної моделі та встановлено умову самозабезпечення прийнятності лінеаризації; у §2.3.3 побудовано алгоритм рецидивного горизонту з оцінкою обчислювального бюджету.

2.3.1. Постановка задачі оптимального керування

Задачу предиктивного керування процесом магнітної сепарації сформульовано як задачу оптимізації на скінченному горизонті з явними обмеженнями. На кожному такті дискретного часу k розв'язується задача мінімізації функціонала якості [19]:

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N_p} |y(k+i|k) - y_{\text{ref}}|^2 Q^2 + \sum_{j=0}^{N_c-1} |\Delta u(k+j)|_R^2 \quad (2.15)$$

де $y(k+i|k)$ — прогнозоване значення вектора виходів на i -му кроці горизонту, обчислене KRR-моделлю; y_{ref} — вектор заданих значень; $\Delta u(k+j) = u(k+j) - u(k+j-1)$ — приріст вектора керуючих впливів; $Q \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ та $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ — діагональні матриці вагових коефіцієнтів; N_p — горизонт прогнозу; N_c — горизонт керування ($N_c \leq N_p$).

Горизонт прогнозу обрано на основі співвідношення $N_p \geq T/T_s$, де T — домінуюча стала часу об'єкта [51], T_s — такт дискретизації. Для процесу магнітної сепарації $T \approx 480$ с (сума транспортного запізнення $\tau = 120$ – 180 с та динаміки осадження), $T_s = \Delta t = 60$ с, звідки $N_p \geq 480/60 = 8$. Прийнято $N_p = 10$ із запасом на транзієнтні режими (обґрунтування деталізовано у §4.1.1). Горизонт керування $N_c = 3$ обрано відповідно до стандартної практики MPC [19]: при $N_c \ll N_p$ решта керуючих впливів ($j = N_c, \dots, N_p - 1$) утримується на рівні $u(k + N_c - 1)$, що зменшує розмірність задачі оптимізації без суттєвої втрати якості керування.

Матрицю вагових коефіцієнтів виходів Q визначено наступним чином. Елементи Q обрано за принципом *inverse-range scaling*: $q_i = 1/\Delta y_{i \max}^2$ [51], де $\Delta y_{i \max}$ — максимально допустиме відхилення i -го виходу від заданого значення. Для двовихідної задачі:

$$Q = \begin{pmatrix} q_\beta & 0 \\ 0 & q_\epsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.944 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 6.250 \times 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad (2.16)$$

де $q_\beta / q_\epsilon \approx 11.1$. Таке співвідношення відображає технологічний пріоритет вмісту заліза β_{Fe} : порушення нижньої межі $\beta_{\text{Fe}, \min} = 65$ % (регламентна вимога, табл. 2.3) призводить до відхилення кондиційного концентрату, тоді як зниження коефіцієнта вилучення ϵ впливає на економічну ефективність, але не спричиняє негайної зупинки процесу. Принцип *inverse-range scaling* забезпечує нормалізований штраф: одиничне відхилення кожного виходу від максимально допустимого вносить рівний

внесок у функціонал (2.15), а різниця у q_B та q_E відображає різну ширину допустимих діапазонів.

Матрицю вагових коефіцієнтів приростів R побудовано аналогічно. Елементи R обрано аналогічно: $r_i = 1/\Delta u_i^2 \max$, де $\Delta u_i \max$ — максимально допустимий приріст i -го керуючого впливу за один такт:

$$R_0 = \begin{pmatrix} r_B & 0 & 0 \\ 0 & r_\rho & 0 \\ 0 & 0 & r_Q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40000 & 0 & 0 \\ 0 & 2.500 \times 10^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 4.000 \times 10^{-4} \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

де $\Delta u \max = (\Delta B \max; \Delta \rho \max; \Delta Q \max) = (0.005 \text{ Тл}; 20 \text{ кг/м}^3; 50 \text{ м}^3/\text{год})$ — максимально допустимі прирости керуючих впливів за один такт, що визначаються обмеженнями обмеженого авторитету (Limited Authority Control, LAC): $\Delta B \max$ — паспортне обмеження ПБМ-90/250 (§4.5.4); $\Delta \rho \max$ та $\Delta Q \max$ — технологічний регламент насосного обладнання (§4.5.4). Значення $r_B = 1/(0.005)^2 = 40\,000$ домінує в R_0 , що відображає найжорстіше фізичне обмеження — малий допустимий діапазон зміни магнітної індукції за один такт. Вибір $r_i = 1/\Delta u_i^2 \max$ є одночасно технологічно обґрунтованим обмеженням i , як встановлено у §2.3.2, механізмом самозабезпечення прийнятності лінеаризації. На сепараторі ПБМ-90/250 магнітна індукція B створюється постійними магнітами з ручним кутовим регулюванням, тому є квазістатичним параметром режиму: у замкненому контурі вона утримується на встановленому оператором значенні, а К-МРС формує для неї лише рекомендацію (advisory). Автоматичними керуючими впливами замкненого контуру з тактом $T_s = 60 \text{ с}$ залишаються ρ та Q . Триканальний формалізм $u = (B, \rho, Q)$ і KRR-модель $f(B, \rho, Q)$ зберігаються повністю; домінування ваги $r_B = 40\,000$ у R_0 відповідає саме квазістатичному (повільному, ручному) характеру зміни B і узгоджується з функціональною схемою підключення (§4.6).

Обмеження задачі оптимального керування формуються наступним чином. Задача (2.15) розв'язується з урахуванням трьох типів обмежень:

— бок-обмеження на керуючі впливи: $u_{\min} \leq u(k+j) \leq u_{\max}$, $j = 0, \dots, N_c - 1$, де межі відповідають паспортним діапазонам ПБМ-90/250 (табл. 2.3);

— обмеження на прирости: $-\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j) \leq \Delta u_{\max}$, $j = 0, \dots, N_c - 1$, що реалізують механізм ЛАС;

— м'які обмеження на виходи: $y_{\min} - \xi \leq y(k+i|k) \leq y_{\max} + \xi$, $i = 1, \dots, N_p$, де $\xi \geq 0$ — slack-змінні з квадратичним штрафом у функціоналі, що запобігають нерозв'язності QP-задачі при нереалізованих заданих значеннях [19].

2.3.2. Лінеаризація KRR-моделі для задачі QP

Лінеаризація KRR-моделі навколо опорної траєкторії виконано наступним чином. На кожному такті k KRR-модель лінеаризується навколо опорної траєкторії керуючих впливів [19] $u^0(k+j)$, $j = 0, \dots, N_p - 1$:

$$y(k+i|k) \approx f^*(u^0(k+i)) + G(u^0(k+i)) \cdot \Delta u(k+i), \quad (2.18)$$

де $G(u^0) = \partial f^* / \partial u|_{\{u=u^0\}}$ — яacobіан розмірності 2×3 , обчислений за аналітичною формулою (2.11). Опорна траєкторія u^0 формується з розв'язку попереднього такту (warm start) [19]: $u^0(k+j) = u^*(k+j|k-1)$, $j = 0, \dots, N_p - 1$, зі зсувом на один крок.

Підстановка лінеаризованої моделі (2.18) у функціонал (2.15) зводить NLP до стандартної задачі QP [47] відносно вектора приростів $\Delta U = (\Delta u(k)^T, \Delta u(k+1)^T, \Delta u(k+2)^T)^T \in \mathbb{R}^9$:

$$\min_{\{\Delta U\}} \left(\frac{1}{2} \Delta U^T H \Delta U + f^T \Delta U \right) \text{ при } A \Delta U \leq b, \quad (2.19)$$

де $H = \Theta^T Q \Theta + R$ — гессіан задачі; Θ — матриця предикції, побудована з яacobіанів $G(u^0(k+j))$; $Q = \text{diag}(Q, \dots, Q) \in \mathbb{R}^{2N_p \times 2N_p}$ та $R = \text{diag}(R, \dots, R) \in \mathbb{R}^{3N_c \times 3N_c}$ — блочно-діагональні матриці; f — лінійний член, що залежить від

прогнозованої вільної складової та вектора заданих значень; A та b — матриця та вектор обмежень, що включають box-обмеження, обмеження на прирости та м'які обмеження на виходи.

Строга опуклість QR-задачі гарантується аналогічно. Гессіан задачі (2.19) задовольняє нерівність:

$$H = \Theta^T Q \Theta + R \geq \bar{R} > 0, \quad (2.20)$$

оскільки $\Theta^T Q \Theta \geq 0$ (як добуток симетричних невід'ємно визначених матриць) і $R > 0$ (як блочно-діагональна матриця з $R_0 > 0$ на діагоналі, див. (2.17)). Строга позитивна визначеність H гарантує існування та єдиність глобального мінімуму QR-задачі (2.19). Ця гарантія є аналітичною та не залежить від числових характеристик конкретної робочої точки — на відміну від підходів із числовим диференціюванням, де похибка у якобіані може порушити позитивну визначеність H при малих $\lambda_{\min}(R)$.

Умова прийнятності лінеаризації визначається наступним чином. Лінеаризація (2.18) є наближенням першого порядку, похибка якого визначається залишком другого порядку розкладу Тейлора. Для RBF-ядра похибка лінеаризації оцінюється як:

$$e_{\text{lin}} \approx \frac{1}{2} \left(\frac{|\Delta u|}{\sigma} \right)^2 C_{\text{curv}}, \quad (2.21)$$

де $C_{\text{curv}} \in [0.45; 0.70]$ — безрозмірна кривизна нормованої RBF-функції, що залежить від типу руди Кривбасу (М: 0.45, МХ: 0.55, Q: 0.70; §4.3.2). Умова прийнятності лінеаризації формулюється як:

$$e_{\text{lin}} \leq \delta_{\text{max}} \quad (2.22)$$

$\delta_{\text{max}} = 5 \%$ — максимально допустима відносна похибка лінеаризації. Підстановка (2.21) у (2.22) дає умову на норму приросту: $\|\Delta u\| \leq \delta_{\text{max}} \sim C \cdot \sigma$, де C — константа, що залежить від δ_{max} та C_{curv} .

Ключовим результатом є те, що матриця $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u_{\text{max}}^2)$, обрана у §2.3.1 за технологічним принципом, одночасно забезпечує виконання

умови прийнятності лінеаризації (2.22) без необхідності введення зовнішнього механізму trust region. Кількісне обґрунтування наведено у табл. 2.7.

Таблиця 2.7 Похибка лінеаризації за сценаріями

Сценарій	$\ \Delta u\ /\sigma$	e_{lin}	Відн. $\delta_{max} = 5\%$	Примітка
$R = R_0$ (штатний)	≈ 0.08	0.1–0.3 %	$\ll \delta_{max}$	Самозабезпечення працює
$R = 0$ (без штрафу)	0.2–0.3	2–5 %	$\approx \delta_{max}$	На межі прийнятності
$R = 0$, агресивне керування	> 0.5	$> 10\%$	$> \delta_{max}$	Потребує SQP-коректор

При штатному режимі ($R = R_0$) штраф на $\|\Delta u\|$ у функціоналі (2.15) утримує нормовану норму приросту на рівні $\|\Delta u\|/\sigma \approx 0.08$, що за формулою (2.21) відповідає похибці лінеаризації $e_{lin} \approx 0.1\text{--}0.3\%$, тобто на порядок менше за допустимий рівень $\delta_{max} = 5\%$. При відсутності штрафу ($R = 0$) нормована норма зростає до 0.2–0.3, і похибка наближається до допустимої межі. При агресивному керуванні без штрафу $\|\Delta u\|/\sigma > 0.5$, що відповідає $e_{lin} > 10\%$ і потребує введення зовнішнього SQP-коректора.

На основі проведеного аналізу сформульовано наступний висновок:

Самозабезпечення прийнятності лінеаризації через R . При $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u_{max}^2)$ штраф на приріст керуючих впливів у функціоналі (2.15) утримує нормовану норму приросту $\|\Delta u\|/\sigma \approx 0.08$, що відповідає похибці лінеаризації $e_{lin} \approx 0.1\text{--}0.3\% \ll \delta_{max} = 5\%$. Відтак, матриця R_0 , обрана за технологічним принципом, одночасно є механізмом самозабезпечення прийнятності лінеаризації KRR-моделі, що усуває необхідність зовнішнього trust region у номінальному режимі роботи [47].

Обґрунтування. Функціонал (2.15) містить штрафний член $\|\Delta u\|_R^2 = \Delta u^T R_0 \Delta u$, що обмежує $\|\Delta u\|$ зверху. При $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u_{\max}^2)$ кожна компонента приросту Δu_j штрафується обернено пропорційно до квадрата її максимально допустимого значення, що є найжорстішим обмеженням для каналу В ($r_B = 40\,000$). Результируюча нормована норма $\|\Delta u\|/\sigma \approx 0.08$ (табл. 2.7) забезпечує $e_{\text{lin}} \approx \frac{1}{2} \cdot (0.08)^2 \cdot C_{\text{curv}} \approx 0.1\text{--}0.3\%$ (при $C_{\text{curv}} \in [0.45; 0.70]$). Нерівність $0.3\% \ll 5\%$ підтверджує виконання умови (2.22) з багаторазовим запасом.

Зв'язок між технологічно обґрунтованою структурою матриці R та умовою самозабезпечення прийнятності лінеаризації є структурним: вибір $r_i = 1/\Delta u_{i\max}^2$ створює умови, за яких лінеаризація є прийнятною автоматично. Ця подвійна роль матриці R є одним із центральних результатів дисертації: один конструктивний елемент одночасно забезпечує технологічну коректність керування та математичну коректність лінеаризації.

Прийнятий метод лінеаризації KRR-моделі навколо опорної траєкторії на кожному такті (П-14, Додаток А) визначає область прийнятності керування умовою $\|\Delta u\|/\sigma \leq s_{\max}$. Кількісна перевірка для трьох типів руди Кривбасу (§3.1.2) показала запас 4–6× від робочого значення до граничного. У режимах, що виходять за межі цієї області ($R \rightarrow 0$, агресивне керування, табл. 2.7), потрібне введення зовнішнього SQP-коректора, що є напрямом розширення методу.

2.3.3. Розв'язання задачі QP та алгоритм предиктивного керування

Розмірність QP-задачі визначається параметрами горизонту керування. При $N_c = 3$ та $d = 3$ (кількість керуючих впливів) вектор оптимізації $\Delta U \in \mathbb{R}^9$ доповнюється slack-змінними для м'яких обмежень на виходи. З урахуванням двох виходів та $N_p = 10$ кроків горизонту загальна

кількість змінних оптимізації становить 29 (9 приростів + 20 slack-змінних). Кількість нерівностей складає 56: box-обмеження на керуючі впливи ($2 \times 3 \times N_c = 18$), обмеження на прирости ($2 \times 3 \times N_c = 18$) та м'які обмеження на виходи ($2 \times 2 \times N_p = 40$, з урахуванням двосторонності), за вирахуванням надлишкових обмежень.

Для розв'язання QP-задачі обрано метод active-set [52] з теплим стартом [53] (warm start). Теплий старт використовує активну множину обмежень, отриману на попередньому такті, як початкове наближення, що суттєво скорочує кількість ітерацій: при малих змінах робочої точки між тактами активна множина змінюється незначно, і розв'язувач потребує 1–5 ітерацій замість повного перебору. Складність однієї ітерації active-set для задачі розмірності $m = 3 \cdot N_c = 9$ складає $O(m^3)$, що при $m = 9$ є обчислювально незначним.

Алгоритм рецидивного горизонту К-МРС сформульовано як послідовність кроків одного такту предиктивного керування. Відповідна послідовність обчислень наведена у вигляді блок-схеми на рис. 2.2.

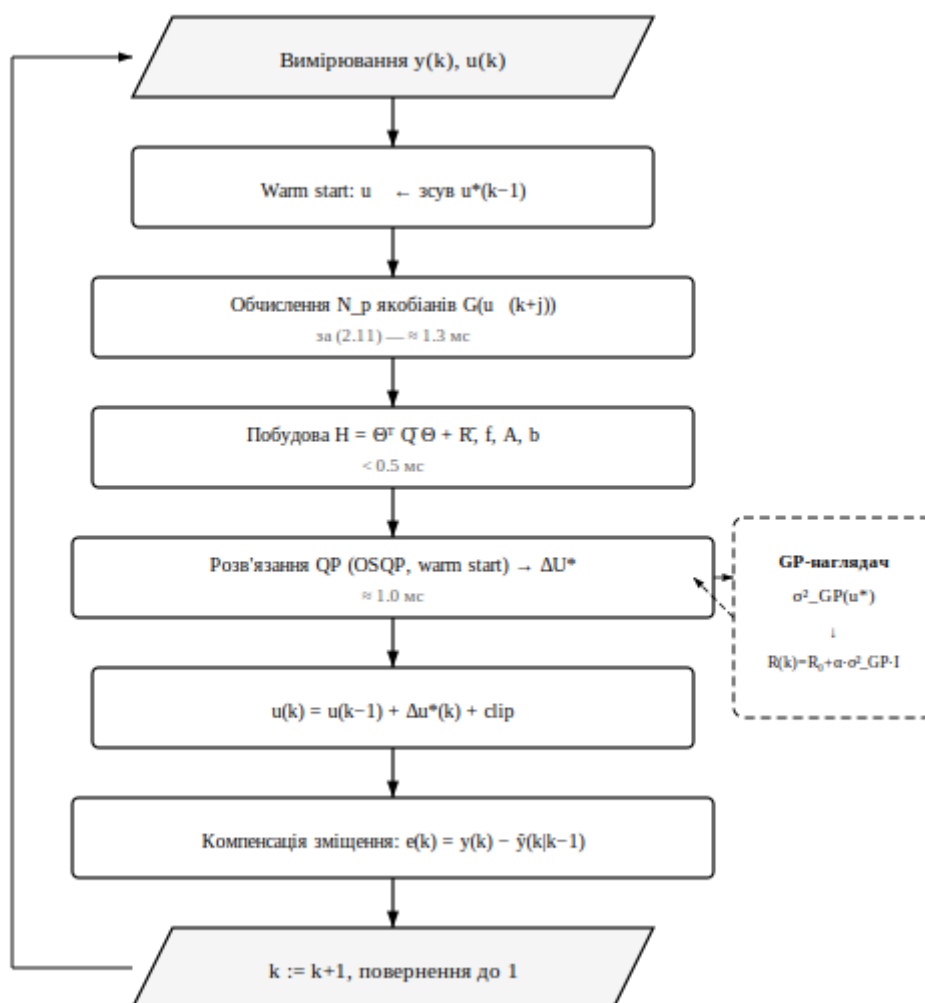


Рис. 2.2 Блок-схема алгоритму одного такту К-MPC

Крок 1. Вимірювання та ініціалізація. Отримати поточний стан $u(k)$ та вихід $y(k)$. Сформувати опорну траєкторію $u^0(k+j)$, $j = 0, \dots, N_p - 1$, зі зсувом розв'язку попереднього такту (warm start).

Крок 2. Обчислення яacobіанів. Для кожного кроку горизонту $j = 0, \dots, N_p - 1$ обчислити яacobіан $G(u^0(k+j))$ за аналітичною формулою (2.11) з коефіцієнтами $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ навченої KRR-моделі.

Крок 3. Побудова QP-задачі. Сформувати матрицю предикції Θ з яacobіанів G , обчислити гессіан $H = \Theta^T Q \Theta + R$, лінійний член f та матрицю обмежень A , b .

Крок 4. Розв'язання QR. Розв'язати задачу (2.19) методом active-set з теплим стартом від активної множини попереднього такту. Отримати оптимальний вектор приростів ΔU^* .

Крок 5. Застосування першого елемента. Відповідно до принципу рецидивного горизонту, застосувати лише перший елемент розв'язку [19]: $u(k) = u(k-1) + \Delta u^*(k)$.

Крок 6. Компенсація зміщення. Обчислити різницю між вимірним виходом $y(k)$ та прогнозом $f^*(u(k))$. Використати цю різницю для корекції прогнозів на наступному такті [54], що компенсує систематичне зміщення моделі.

Крок 7. Зсув та перехід. Зсунути опорну траєкторію на один крок для наступного такту. Перейти до $k := k + 1$, повернутися до Кроку 1.

Обчислювальний бюджет одного такту К-МРС оцінено наступним чином. Деталізований обчислювальний профіль наведено у табл. 2.8.

Таблиця 2.8 Обчислювальний бюджет одного такту К-МРС

Компонента	Складність	Час
Вимірювання + warm start	$O(N_c \cdot 3)$	< 0.1 мс
Нр яacobіанів G	$O(N_p \cdot n \cdot d)$	≈ 1.3 мс
Побудова Θ , H , f	$O(N_p \cdot N_c \cdot 6)$	< 0.5 мс
QR active-set (warm start)	$O((3N_c)^3)$	< 5 мс
Разом	—	< 10 мс

Сумарний час одного такту не перевищує 10 мс, що є консервативною верхньою межею. Деталізований профіль end-to-end, отриманий за результатами симуляційного тестування (§3.5.3), підтверджує суттєвий запас відносно цієї межі. Відношення часу обчислення до такту

дискретизації становить $10 \text{ мс} / 60\,000 \text{ мс} < 0.02 \%$, що забезпечує багатотисячний запас для виконання в реальному часі.

Домінуючою складовою обчислювального бюджету є обчислення $N_p = 10$ яacobіанів за аналітичною формулою (2.11): $O(N_p \cdot n \cdot d) = O(10 \cdot 500 \cdot 3) = O(15\,000)$ операцій, що складає приблизно 1.3 мс. Розв'язання QR при розмірності $m = 9$ з теплим стартом потребує менше 5 мс. Решта операцій (ініціалізація, побудова матриць) є обчислювально незначними.

Розроблений алгоритм К-МРС інтегрує три взаємопов'язані результати: задачу оптимального керування з технологічно обґрунтованими вагами (§2.3.1), лінеаризацію KRR-моделі з властивістю самозабезпечення прийнятності через матрицю R , та детермінований семикроковий алгоритм рецидивного горизонту з обчислювальним бюджетом менше 10 мс при такті дискретизації 60 с. Побудований алгоритм є вихідною точкою для трирівневої адаптивної архітектури, що розглядається у §2.4.

2.4. Адаптивна архітектура системи ідентифікації

Алгоритм К-МРС, побудований у §2.3, базується на KRR-моделі фіксованої вибірки. Оскільки процес магнітної сепарації є суттєво нестационарним, необхідний механізм адаптації ідентифікаційної моделі. У §2.4.1 обґрунтовано мотивацію адаптації через аналіз класів нестационарності; у §2.4.2 побудовано трирівневу архітектуру та кількісно порівняно стратегії адаптації; у §2.4.3–2.4.5 деталізовано кожен рівень: SVR-фільтр аномалій, ковзне вікно для оновлення KRR та GP-наглядач невизначеності з адаптивною матрицею $R(k)$.

2.4.1. Нестационарність процесу магнітної сепарації як мотивація адаптації

Аналіз технологічних умов експлуатації магнітних сепараторів ПБМ-90/250 на гірничо-збагачувальних комбінатах Кривбасу (§1.1.1) дає

підстави виокремити три класи нестаціонарності, що відрізняються характерними часовими масштабами та механізмами прояву.

Перший клас — варіація мінерального складу руди. Мінеральний склад руди, що надходить на магнітну сепарацію, може змінюватися внаслідок переходу між пластами, змішування потоків із різних вибоїв та сезонних коливань водонасичення. Характерний часовий масштаб — від кількох годин до зміни. Цей клас зумовлює зміну параметрів нелінійних залежностей $\beta\text{Fe}(B, \rho, Q)$ та $\varepsilon(B, \rho, Q)$, зокрема зміщення оптимуму ρ_{opt} і параметрів сигмоїдної залежності $\beta\text{Fe}(B)$.

Другий клас — зміна гранулометричного складу. Крупність подрібненої руди залежить від стану кульових млинів, режиму класифікації та властивостей вхідного матеріалу. Характерний часовий масштаб — тижні та сезонні цикли. Гранулометричний склад впливає на ефективність захоплення магнітних частинок барабаном сепаратора, що проявляється у вигляді повільного дрейфу параметрів моделі.

Третій клас — знос магнітної системи барабана. Поступова деградація постійних магнітів і зміна зазору між барабаном та ванною зумовлюють поступове зниження ефективності сепарації. Характерний часовий масштаб — місяці.

Для ілюстрації масштабу проблеми розглянуто найжорсткіший сценарій — стрибкоподібну зміну типу руди з магнетитової (М) на кварцитову (Q). За результатами симуляції, статична KRR-модель (навчена на даних М-руди) при застосуванні до Q-руди дає $\text{RMSE}_{\text{static}} \approx 7.98$ нормалізованих одиниць, що є недостатнім для контуру предиктивного керування. Для порівняння, адаптивна система (Стратегія-S4) забезпечує $\text{RMSE}_{\text{adapt}} \approx 0.22$ нормалізованих одиниць. При повільному дрейфі складу руди (без стрибкоподібної зміни типу) деградація статичної моделі є менш вираженою (§4.4.2), проте також недостатньою для контуру керування.

На основі проведеного аналізу сформульовано вимоги до адаптивної системи. Різноманітність механізмів нестаціонарності та їхніх часових масштабів формує три вимоги до адаптивної системи ідентифікації: (а) відсів аномальних вимірювань, що виникають внаслідок збоїв давачів або різких збурень і не відображають зміну параметрів процесу; (б) відстеження повільного дрейфу параметрів через оновлення навчальної вибірки; (в) діагностика невизначеності прогнозу при виході за межі навчального домену. Стандартне ковзне вікно, яке є широко застосованим та добро зарекомендованим підходом до адаптації ідентифікації моделей [55], задовольняє лише вимогу (б), не диференціюючи аномалії (а) від дрейфу і не забезпечуючи діагностику (в). Це обґрунтовує необхідність багаторівневої архітектури.

2.4.2. Загальна архітектура адаптивної системи ідентифікації

Три вимоги до адаптивної системи, сформульовані у §2.4.1, визначають структуру трирівневої архітектури, в якій кожному рівню відповідає окремий метод ядерної регресії з обґрунтованою функціональною роллю.

Трирівневу архітектуру адаптивної системи ідентифікації подано у вигляді ієрархії трьох рівнів:

Рівень 1 — SVR-фільтр аномалій. Метод опорних векторів (SVR) виконує функцію детектора аномальних вимірювань. Структурною перевагою SVR є ϵ -нечутлива зона [41, 56], що природно формує область «нормальних» значень: спостереження, що виходять за межі цієї зони, класифікуються як аномальні та виключаються з навчальної вибірки KRR. Цей рівень забезпечує вимогу (а) — відсів аномалій (деталізація у §2.4.3).

Рівень 2 — ковзне вікно з перенавчанням KRR. Відфільтровані спостереження додаються до ковзного вікна фіксованого розміру W , після чого KRR-модель перенавчається на оновленій вибірці. Цей рівень

забезпечує вимогу (б) — відстеження повільного дрейфу параметрів (деталізація у §2.4.4).

Рівень 3 — GP-наглядач невизначеності. Гауссівський процес (GP) обчислює апостеріорну дисперсію $\sigma_{GP}^2(u^*)$ [33], що кількісно характеризує надійність прогнозу KRR у поточній робочій точці. При зростанні невизначеності матриця штрафних ваг $R(k)$ автоматично збільшується, переводячи контролер у консервативний режим. Цей рівень забезпечує вимогу (в) — діагностику невизначеності (деталізація у §2.4.5). Структуру трирівневої адаптивної архітектури наведено на рис. 2.3.

Принциповою архітектурною особливістю є те, що всі три методи (SVR, KRR, GP) використовують єдине RBF-ядро (2.10) та, відповідно, працюють в одному відтворюваному ядерному гільбертовому просторі $\mathcal{H}_k$ [32]. Практичним наслідком цієї єдності є можливість обчислення GP-дисперсії через матрицю Грама KRR без додаткової інверсії матриці $n \times n$:

$$\sigma_{GP}^2(u^*) = k(u^*, u^*) - k(u^*)^T (K + \lambda I)^{-1} k(u^*), \quad (2.23)$$

де $k(u^*) = (k(u_1, u^*), \dots, k(u_n, u^*))^T$ — вектор ядерних значень між точкою прогнозу u^* та навчальними точками. Інверсія $(K + \lambda I)^{-1}$ вже обчислена на етапі навчання KRR (формула (2.8)), тому обчислення σ_{GP}^2 потребує лише одного матрично-векторного добутку $O(n^2)$, що є прийнятним для реального часу. Ця властивість становить зміст елемента наукової новизни — математичної єдності SVR, KRR та GP через спільний відтворюваний ядерний гільбертів простір $\mathcal{H}_k$, що забезпечує обчислювальну ефективність трирівневої архітектури.

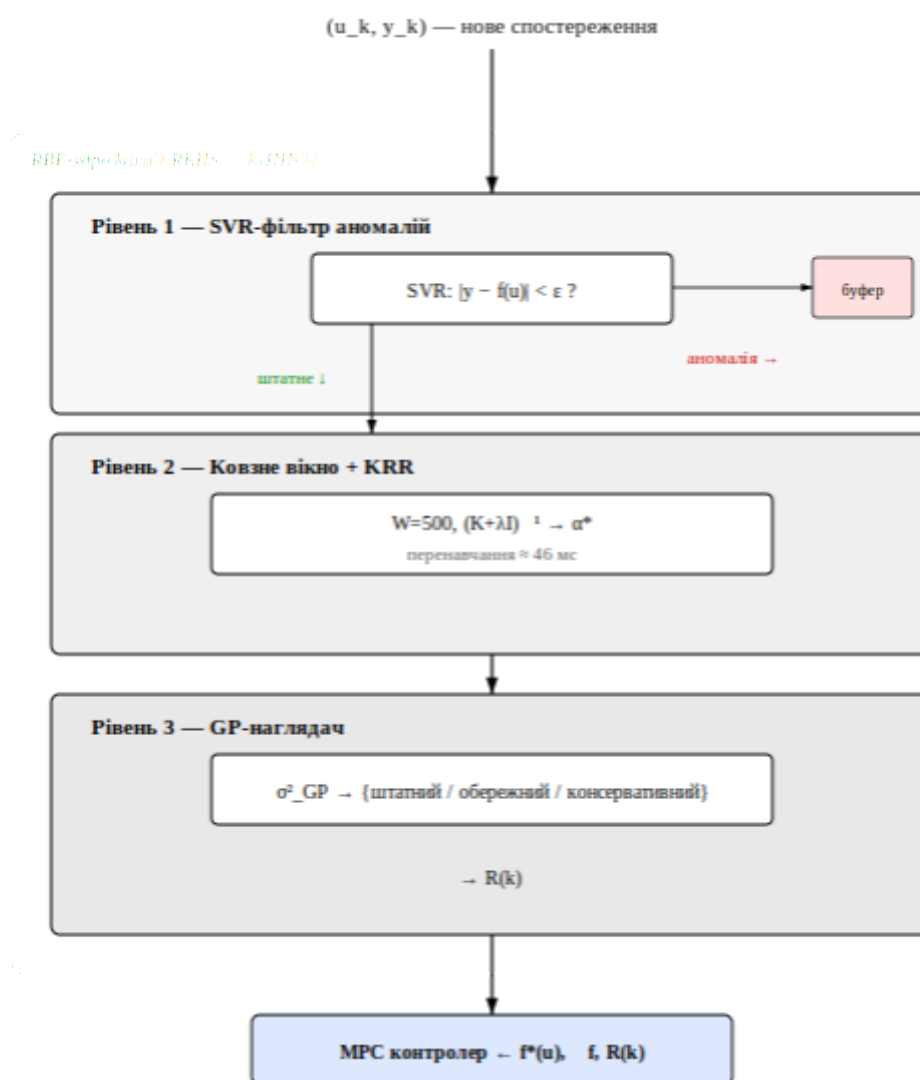


Рис. 2.3 Трирівнева адаптивна архітектура системи ідентифікації

Примітка щодо позначень. У цьому розділі використовуються позначення Стратегія-S0 ... Стратегія-S4 для стратегій адаптації ідентифікаційної моделі. Ці позначення є незалежними від верифікаційних Сценаріїв S1–S5 (розділ 3, §3.6; розділ 4, §4.4), де та сама літера S позначає тестові сценарії BNK-порівняння.

Для кількісного обґрунтування трирівневої архітектури проведено порівняння п'яти стратегій адаптації, що послідовно вмикають компоненти архітектури. Результати зведено у табл. 2.9.

Таблиця 2.9 Порівняння стратегій адаптації (сценарій $M \rightarrow Q$)

Стратегія	Опис	RMSE	$T_{\text{відн.}}$, такти
Стратегія-S0	Статична KRR (без адаптації)	7.98	∞
Стратегія-S1	Ковзне вікно без SVR-фільтра	1.8–2.5	15–25
Стратегія-S2	SVR-фільтр + ковзне вікно, без GP	0.5–0.8	8–12
Стратегія-S3	Повна архітектура без GP-наглядача	0.3–0.5	6–9
Стратегія-S4	Повна архітектура SVR+KRR+GP	0.22	5–8

Стратегія-S0 (статична модель) демонструє недостатню точність із похибкою $RMSE \approx 7.98$ при зміні типу руди $M \rightarrow Q$. Стратегія-S1 (ковзне вікно без SVR-фільтра) зменшує $RMSE$ до 1.8–2.5, проте час відновлення становить 15–25 тактів через забруднення навчальної вибірки аномаліями. Обґрунтування: при відсутності SVR-фільтра у типовому сценарії виявляється 50 аномалій типу А за 240 кроків (приблизно 21 %); з урахуванням аномалій типу Б частка зростає до приблизно 31 %. Потрапляння аномалій у навчальну вибірку збільшує ефективний шум: $\sigma_{\text{eff}} \approx \sqrt{(0.69 \cdot \sigma_{\eta}^2 + 0.31 \cdot (k \cdot \sigma_{\eta})^2)}$ при $k \approx 4$, звідки $\sigma_{\text{eff}} \approx 2.5 \cdot \sigma_{\eta}$, і $RMSE$ зростає пропорційно.

Стратегія-S2 (SVR-фільтр + ковзне вікно) знижує $RMSE$ до 0.5–0.8 та час відновлення до 8–12 тактів за рахунок виключення аномалій. Стратегія-S3 додатково зменшує $RMSE$ до 0.3–0.5, проте без GP-наглядача контролер не має механізму консервативного керування при невизначеності. Повна

архітектура Стратегія-S4 (SVR+KRR+GP) забезпечує найкращий результат: $RMSE \approx 0.22$, час відновлення 5–8 тактів. Покращення відносно статичної моделі становить $7.98/0.22 \approx 36.3\times$ для сценарію $M \rightarrow Q$; кількісна оцінка покращення при повільному дрейфі наведена у §4.4.2.

Час відновлення Стратегії-S4 обґрунтовано наступним чином: мінімальний час детекції стрибка SVR-фільтром становить $N_{\text{jump}} = 3\text{--}5$ тактів, додатково 1–2 такти на перенавчання KRR ($O(W^3) \approx 46 \text{ мс} \ll \Delta t = 60 \text{ с}$, тобто перенавчання вкладається в один такт). Разом: $5\text{--}8 \text{ тактів} \times 60 \text{ с} = 5\text{--}8 \text{ хв}$.

2.4.3. SVR як компонент фільтрації аномальних вимірювань

Критерій аномальності визначено на основі нев'язки SVR-моделі. Для кожного спостереження (u_k, y_k) обчислюється нев'язка між виміряним значенням та прогнозом SVR-моделі:

$$\delta_k = |y_k - f_{\text{SVR}}(u_k)|, \quad (2.24)$$

Спостереження класифікується як аномальне, якщо нев'язка перевищує адаптивний поріг:

$$\delta_k > \varepsilon_{\text{thr}} = \kappa \cdot \sigma_{\text{noise}}, \quad (2.25)$$

де σ_{noise} — оцінка рівня шуму; κ — коефіцієнт порогу. При $\kappa = 2.5$ ймовірність хибного спрацювання для гауссівського шуму становить $P(\text{хибне}) \approx 1.2 \%$, що є прийнятним компромісом між чутливістю та специфічністю фільтра.

Детекцію стрибкоподібних змін побудовано на принципі послідовних аномалій. Поодинокі аномалії може бути спричинені випадковим збоєм давача, тоді як стрибкоподібна зміна типу руди проявляється як послідовність аномалій [57]. Для розрізнення цих ситуацій введено критерій послідовних аномалій: стрибок фіксується, якщо кількість послідовних аномалій перевищує поріг $N_{\text{consec}} \geq N_{\text{jump}} = 3\text{--}5$ тактів. При

фіксації стрибка система переходить у режим прискореного оновлення ковзного вікна (§2.4.4).

Спостереження, класифіковані як аномальні, виключаються з навчальної вибірки KRR, проте зберігаються у окремому буфері для подальшого аналізу. Якщо після фіксації стрибка нові спостереження стабільно проходять фільтр ($\delta_k \leq \varepsilon_{thr}$ протягом N_{jump} тактів), система переходить у штатний режим оновлення.

2.4.4. Метод ковзного вікна для оновлення KRR

Розмір ковзного вікна визначено з урахуванням характерних часових масштабів нестационарності. Обрано $W = 500$ спостережень, що при такті дискретизації $\Delta t = 60$ с покриває приблизно 8 годин роботи сепаратора. Розмір вікна є компромісом між двома протилежними вимогами: мале вікно забезпечує швидку реакцію на зміну параметрів, проте є чутливим до шуму; велике вікно згладжує шум, проте реагує на дрейф із затримкою [55]. Значення $W = 500$ обране на основі того, що воно охоплює характерний часовий масштаб першого класу нестационарності (варіація мінерального складу, години) та є достатнім для стабільної інверсії матриці Грама К розмірності $W \times W$. Прийняття фіксованого W без побудови кривих навчання є методологічним припущенням (П-8, Додаток А); адаптивне $W(k)$ є напрямом подальшого розширення підходу.

Алгоритм оновлення ковзного вікна реалізовано наступним чином. На кожному такті k , якщо нове спостереження (u_k, y_k) пройшло SVR-фільтр ($\delta_k \leq \varepsilon_{thr}$), виконуються наступні операції: найстаріше спостереження видаляється з вікна; нове спостереження додається; KRR-модель перенавчається на оновленій вибірці розміру W . Якщо спостереження класифіковане як аномалія, оновлення не відбувається, і модель зберігає параметри попереднього такту.

Перенавчання KRR на вікні розміру $W = 500$ потребує $O(W^3)$ операцій для інверсії оновленої матриці Грама. Медіана часу перенавчання становить приблизно 46 мс (30 запусків, $\text{seed}(42)$), що у 5 разів швидше за первинне batch-навчання (приблизно 232 мс). Різниця пояснюється механізмом теплового старту: при інкрементному оновленні вікна використовуються попередньо обчислені структури (факторизація матриці Грама попереднього такту як початкове наближення), тоді як batch-навчання потребує холодної ініціалізації. Відношення часу перенавчання до такту дискретизації: $46 \text{ мс} / 60\,000 \text{ мс} < 0.1 \%$, що дозволяє виконувати оновлення на кожному такті без пропусків.

2.4.5. GP-наглядач. Адаптивна матриця штрафних ваг $R(k)$

Апостеріорна дисперсія GP обчислюється за формулою (2.23). Діапазон значень $\sigma_{\text{GP}}^2 \in [\lambda, 1.0]$, де нижня межа λ відповідає точці, що збігається з навчальною (повна визначеність), а верхня межа $1.0 = k(u^*, u^*)$ — точці, нескінченно віддаленій від усіх навчальних точок (повна невизначеність). Як зазначено у §2.4.2, обчислення (2.23) використовує інверсію $(K + \lambda I)^{-1}$, вже отриману на етапі навчання KRR, і не потребує додаткової інверсії матриці $n \times n$.

На основі σ_{GP}^2 формується адаптивна матриця штрафних ваг:

$$R(k) = R_0 + \alpha \cdot \sigma_{\text{GP}}^2(u^*(k)) \cdot I, \quad (2.26)$$

де R_0 — базова матриця (2.17); α — коефіцієнт підсилення; I — одинична матриця. При зростанні невизначеності σ_{GP}^2 додатковий член $\alpha \cdot \sigma_{\text{GP}}^2 \cdot I$ збільшує штраф на прирости керуючих впливів, що обмежує амплітуду керування та переводить контролер у консервативний режим.

Залежно від рівня невизначеності GP-наглядач працює у трьох режимах, розділених порогами θ_1 та θ_2 . Параметри порогів та коефіцієнта α зведено у табл. 2.10.

Таблиця 2.10 Параметри GP-наглядача за типами руди

Параметр	Вираз	М	МХ	Q
θ_1 (штатний $\rightarrow$ обережний)	$c_1 \cdot \lambda^*$ ($c_1 = 1.0$)	0.040	0.075	0.110
θ_2 (обережний $\rightarrow$ консервативний)	$3 \cdot \theta_1$	0.120	0.225	0.330
α	$r_{\max} / \theta_2$	333 333	177 778	121 212

Обґрунтування порогів є наступним. Поріг $\theta_1 = \lambda^*$ встановлено на рівні параметра регуляризації: при $\sigma^2_{GP} \approx \lambda^*$ невизначеність прогнозу відповідає рівню регуляризації, що є природною межею між штатним та підвищеним режимами. Поріг $\theta_2 = 3 \cdot \theta_1$ відповідає переходу у невивчену область: на межі навчального домену σ^2_{GP} зростає щонайменше у 3 рази відносно внутрішньої області, що є емпірично встановленою характеристикою RBF-ядра.

У штатному режимі ($\sigma^2_{GP} < \theta_1$): $R(k) = R_0$. Керування здійснюється з базовими вагами, оскільки модель працює у добре вивченій області.

В обережному режимі ($\theta_1 \leq \sigma^2_{GP} < \theta_2$): $R(k) = R_0 + \alpha \cdot \sigma^2_{GP} \cdot I$. Матриця R зростає пропорційно невизначеності, що поступово обмежує амплітуду керування.

В консервативному режимі ($\sigma^2_{GP} \geq \theta_2$): $R(k) \approx R_0 + r_{\max} \cdot I$, де $r_{\max} = \max(\text{diag}(R_0)) = 40\,000$. У цьому режимі ефективна матриця R подвоюється на найчутливішому каналі (В), що є технологічно обґрунтованим рівнем консерватизму.

Параметр α визначається через вимогу: при $\sigma^2_{GP} = \theta_2$ додатковий член повинен дорівнювати $r_{\max} = \max(\text{diag}(R_0)) = 40\,000$, тобто $\alpha \cdot \theta_2 = r_{\max}$, звідки $\alpha = r_{\max} / \theta_2$. Перевірка: для М-руди $\alpha \cdot \theta_2 = 333\,333 \times 0.120 = 40\,000 \checkmark$. Таке калібрування забезпечує плавне подвоєння ефективної жорсткості

керування на межі навчального домену — найчутливіший канал (В) отримує додатковий штраф, еквівалентний базовому, що обмежує керуючі впливи без повної зупинки контролера.

Для уникнення коливань між режимами на границі порогу введено гістерезис: перехід з обережного режиму у штатний відбувається лише після того, як $\sigma^2_{GP} < \theta_1$ утримується протягом $N_{hysteresis} = 3-5$ послідовних тактів. Аналогічно для переходу з консервативного режиму в обережний.

Сформульоване становить зміст елемента наукової новизни: вперше запропоновано стратегію адаптивного консервативного керування, в якій матриця штрафних ваг $R(k)$ автоматично збільшується пропорційно апостеріорній дисперсії GP-наглядача при виявленні виходу за межі навчального домену.

Трирівнева адаптивна архітектура $SVR \rightarrow KRR \rightarrow GP$ забезпечує диференційовану реакцію на три класи нестаціонарності процесу магнітної сепарації: SVR-фільтр (§2.4.3) відсіює аномальні вимірювання ($P(\text{хибне}) \approx 1.2\%$), ковзне вікно (§2.4.4, $W = 500$) відстежує повільний дрейф параметрів з часом перенавчання 46 мс, GP-наглядач (§2.4.5) забезпечує плавний перехід у консервативний режим при виході за межі навчального домену через адаптивну матрицю $R(k) = R_0 + \alpha \cdot \sigma^2_{GP} \cdot I$. Математична єдність архітектури через спільний RKHS з єдиним RBF-ядром дозволяє обчислювати GP-дисперсію без додаткової інверсії матриці та кількісно забезпечує покращення RMSE у $36.3\times$ відносно статичної моделі при зміні типу руди.

Висновки до розділу 2

Обґрунтовано вибір методу побудови прогнозової моделі для контуру предиктивного керування: шляхом формалізації системи критеріїв R1–R4 та порівняльного аналізу п'яти методів ядерної регресії (MLP, GP, SVR, LS-SVM, KRR) встановлено, що єдиним методом, який одночасно задовольняє

нелінійну адекватність, обчислювальну ефективність, інтерпретованість та наявність замкненого аналітичного градієнта, є KRR з RBF-ядром; це досягнуто введенням критерію R4 (аналітична лінеаризація) як системоутворюючої вимоги, відсутньої у відомих класифікаціях, де похибка лінійної апроксимації при $\Delta B = \pm 0,15$ Тл сягає 12–18 %, що дозволило не відхиляти решту методів безумовно, а закріпити за SVR роль фільтра аномалій, за GP — наглядача невизначеності, за KRR — основної прогнозної моделі MPC.

Побудовано та налаштовано двовихідну KRR-модель $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ з RBF-ядром і отримано замкнений аналітичний вираз її градієнта: модель формалізовано у відтворюваному ядерному гільбертовому просторі через теорему репрезентант із замкненим розв'язком, а гіперпараметри підібрано аналітичною LOO-крос-валідацією, що забезпечило $\text{RMSE}_{\text{test}} 0,07\text{--}0,10$ (β_{Fe}) та $0,09\text{--}0,12$ (ϵ) нормалізованих одиниць — на рівні теоретичної межі шуму; отриманий аналітичний градієнт обчислюється у 6 разів швидше за числове диференціювання, і саме він забезпечує виконання критерію R4 — точну побудову матриці предикції та гарантовану строгу опуклість QP-задачі, необхідну для перетворення $\text{NLP} \rightarrow \text{QP}$.

Синтезовано алгоритм предиктивного керування K-MPC з рецидивним горизонтом: на основі KRR-моделі сформульовано задачу оптимального керування з матрицями ваг Q і R за принципом *inverse-range scaling*, виконано лінеаризацію навколо опорної траєкторії та зведення до QP-задачі малої розмірності, розв'язуваної методом *active-set* із теплим стартом; ключовим результатом є встановлення того, що матриця $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u^2_{\text{max}})$, обрана за технологічним принципом, одночасно є механізмом самозабезпечення прийнятності лінеаризації — штраф утримує похибку $e_{\text{lin}} \approx 0,1\text{--}0,3$ % $\ll \delta_{\text{max}} = 5$ %, усуваючи потребу у зовнішньому *trust region*, при обчислювальному бюджеті такту < 10 мс $\ll \Delta t = 60$ с.

Розроблено трирівневу адаптивну архітектуру системи ідентифікації $SVR \rightarrow KRR \rightarrow GP$ для забезпечення стійкості до нестационарності процесу: SVR-фільтр відсіює аномальні вимірювання, ковзне вікно з перенавчанням KRR відстежує повільний дрейф, а GP-наглядач через адаптивну матрицю $R(k) = R_0 + \alpha \cdot \sigma_{GP}^2 \cdot I$ переводить контролер у консервативний режим при виході за межі навчального домену; математична єдність архітектури через спільний RKHS з єдиним RBF-ядром дозволяє обчислювати σ_{GP}^2 без додаткової інверсії матриці, що загалом підвищує точність ідентифікації у 36,3 рази при зміні типу руди ($M \rightarrow Q$) та у 15–20 разів при повільному дрейфі відносно статичної KRR-моделі.

РОЗДІЛ 3.

АНАЛІЗ ТА ВЕРИФІКАЦІЯ СИСТЕМИ ПРЕДИКТИВНОГО КЕРУВАННЯ К-МРС

У другому розділі побудовано ядерну модель ідентифікації KRR з аналітичним градієнтом, синтезовано алгоритм К-МРС із перетворенням $NLP \rightarrow QP$ та розроблено тривірневу адаптивну архітектуру $SVR \rightarrow KRR \rightarrow GP$. Отримані результати потребують формального обґрунтування стійкості замкненої системи, незалежної верифікації ключових припущень та кількісного підтвердження переваг К-МРС відносно альтернативних методів керування. Третій розділ присвячено розв'язанню цих завдань як єдиного дослідницького етапу: від математичного формалізму ядерного предиктора до числового порівняльного аналізу.

Мета розділу полягає у доведенні коректності, стійкості та ефективності синтезованої системи К-МРС стосовно процесу магнітної сепарації залізних руд Кривбасу. Досягнення цієї мети передбачає послідовне розв'язання низки взаємопов'язаних підзадач: побудову формальної моделі простору стану та матриці предикції на основі lifting-оператора у RKHS (§3.1), розроблення архітектурного подання системи з обчислювальним конвеєром та механізмом астатизму (§3.2), повну специфікацію QP-задачі оптимізації з методом active-set та стратегією м'яких обмежень (§3.3), формулювання та доведення достатніх умов асимптотичної стійкості на основі функції Ляпунова (§3.4), статистичну та числову валідацію ключових компонент — GP-предиктора, аналітичного градієнта та часових характеристик (§3.5), а також колінеарний порівняльний аналіз ефективності шести методів керування на верифікаційних сценаріях (§3.6).

Структура розділу відображає логіку «від формалізму — через доведення — до числового підтвердження»: теоретичні основи (§3.1) та

архітектура (§3.2) забезпечують апарат для аналізу стійкості (§3.4), валідація (§3.5) підтверджує коректність припущень цього аналізу, а порівняльний бенчмарк (§3.6) кількісно верифікує теоретичні оцінки на сценаріях, наближених до промислових умов.

3.1. Теоретичні основи ядерного предиктивного керування в просторі RKHS

Алгоритм K-MPC, синтезований у другому розділі, вимагає формального математичного апарату для доведення стійкості та верифікації умов коректності. У §3.1.1 побудовано модель простору стану через lifting-оператор і матрицю предикції; у §3.1.2 виконано кількісне підтвердження умов прийнятності лінеаризації для трьох типів руди Кривбасу; у §3.1.3 обґрунтовано вибір QP-рішувача та підтверджено детермінований час розв'язання.

3.1.1. Математичний формалізм ядерних предикторів у просторі стану

KRR-модель $f^*: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (§2.2.2) виконує прогнозування у скінченновимірному вхідному просторі, проте її математична структура визначається оператором вкладення у простір RKHS $\mathcal{H}_k$, асоційований з RBF-ядром $k(u, u') = \exp(-\|u - u'\|^2 / (2\sigma^2))$ [58]. Lifting-оператор $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{H}_k$ відображає вхідний вектор $u = (B, \rho, Q)^T$ у нескінченновимірний простір $\mathcal{H}_k$, де прогноз $f^*(u) = \sum_i \alpha_i \cdot k(u, u_i)$ є лінійним функціоналом відносно образу $\Phi(u)$. Ця властивість, відома як kernel trick, дозволяє трактувати нелінійне відображення у вхідному просторі як лінійне у просторі ознак $\mathcal{H}_k$ [32].

Лінеаризація KRR-моделі навколо опорної траєкторії $u^0(k+j)$ (§2.3.2, формула (2.18)) дозволяє подати прогнозоване відхилення виходів у формі лінійної дискретної системи:

$$x(k+1) = A_k \cdot x(k) + B_k \cdot \Delta u(k), \quad (3.1)$$

де $x(k) = y(k) - y_{\text{ref}}$ — вектор відхилень виходів від заданих значень розмірності 2; $\Delta u(k) \in \mathbb{R}^3$ — вектор приростів керуючих впливів; A_k та B_k — локальні матриці, визначені через якобіан KRR-моделі $G(u^0(k)) = \partial f^* / \partial u|_{\{u=u^0(k)\}} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ (формула (2.11)). Матриця A_k описує вільний рух системи, а $B_k = G(u^0(k))$ — вплив приростів керування на виходи. Суттєвою відмінністю від стандартного лінійного MPC є залежність A_k та B_k від робочої точки $u^0(k)$: матриці оновлюються на кожному такті відповідно до поточної опорної траєкторії, що забезпечує врахування нелінійності процесу без переходу до NLP.

На горизонті прогнозу N_p кроків послідовне застосування моделі (3.1) дає прогнозований вектор виходів $Y = (y(k+1|k)^T, \dots, y(k+N_p|k)^T)^T \in \mathbb{R}^{2N_p}$ як функцію вектора приростів $\Delta U = (\Delta u(k)^T, \dots, \Delta u(k+N_c-1)^T)^T \in \mathbb{R}^{3N_c}$:

$$Y = Y_0 + \Theta \cdot \Delta U, \quad (3.2)$$

де Y_0 — вільна складова, обчислена за опорною траєкторією; $\Theta \in \mathbb{R}^{2N_p \times 3N_c}$ — матриця предикції. Матриця Θ має нижньотрикутну блочну структуру:

$$\Theta = \begin{vmatrix} G(u^0(k)) & 0 & 0 & \dots \\ G(u^0(k+1)) & G(u^0(k+1)) & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(u^0(k+N_p-1)) & G(u^0(k+N_p-1)) & \dots & G(u^0(k+N_p-1)) \end{vmatrix} \quad (3.3)$$

де кожен блок $G(u^0(k+j)) \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$ — якобіан KRR-моделі у відповідній точці опорної траєкторії. Нижня трикутність відображає каузальність: прогноз $y(k+i|k)$ залежить від приростів $\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+i-1)$, але не від майбутніх приростів. При $j \geq N_c$ прирости утримуються на нулі ($\Delta u(k+j) = 0, j = N_c, \dots, N_p - 1$), що забезпечує зменшення розмірності задачі оптимізації відповідно до вибору $N_c < N_p$ (§2.3.1).

Модель простору стану (3.1) та матриця предикції Θ є узагальненням стандартних конструкцій лінійного MPC. У випадку лінійної моделі $f(u) = A \cdot u$ якобіан $G(u^0) = A = \text{const}$, і матриця Θ вироджується у стандартну

матрицю предикції LMPC з постійними блоками. Відтак, LMPC є окремим випадком K-MPC при лінійній залежності між керуючими впливами та виходами. Нелінійність KRR-моделі проявляється через залежність блоків $G(u^0(k+j))$ від робочої точки, що вимагає оновлення Θ на кожному такті.

Підстановка матричного подання $Y = Y_0 + \Theta \cdot \Delta U$ у функціонал (2.15) приводить до QP-задачі (2.19), гессіан якої $H = \Theta^T Q \Theta + R \succ 0$ (2.20) успадковує строгу позитивну визначеність від $R \succ 0$ незалежно від конкретних значень $G(u^0(k+j))$. Ця структурна гарантія є прямим наслідком вибору матриці R_0 (§2.3.1) та аналітичної природи градієнта KRR (§2.2.2).

3.1.2. Trust region та умова коректності лінеаризації

Відповідно до формули (2.21), похибка лінеаризації KRR-моделі з RBF-ядром визначається як:

$$e_{lin} \approx \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot C_{curv}, \quad (3.4)$$

де $s = \|\Delta u\|/\sigma$ — нормована норма приросту керуючих впливів; C_{curv} — безрозмірна кривизна нормованої RBF-функції, яка залежить від типу руди та характеризує ступінь нелінійності прогновної моделі у даній робочій точці. Три типи руди Кривбасу (§4.3.2) відповідають різним значенням C_{curv} : магнетитова руда (М) має найменшу кривизну ($C_{curv} = 0.45$), змішана (МХ) — проміжну ($C_{curv} = 0.55$), кварцитова (Q) — найбільшу ($C_{curv} = 0.70$). Зростання C_{curv} від М до Q відображає збільшення нелінійності залежностей $\beta_{Fe}(B, \rho, Q)$ та $\varepsilon(B, \rho, Q)$ для кварцитових руд, що пояснюється ширшим розкидом магнітної сприйнятливості мінеральних зерен.

Результати обчислення похибки лінеаризації для трьох типів руди при номінальному режимі ($R = R_0$) наведено у табл. 3.1.

Таблиця 3.1 Похибка лінеаризації e_{lin} для трьох типів руди Кривбасу

Тип руди	C_{curv}	s при $R = R_0$	$e_{\text{lin}}, \%$	s_{max} (при $e_{\text{lin}} = 5 \%$)	$\ \Delta u\ _{\text{max}}$
М (магнетитова)	0.45	0.07	0.11	0.47	$0.47 \cdot \sigma^*$
МХ (змішана)	0.55	0.08	0.18	0.43	$0.43 \cdot \sigma^*$
Q (кварцитова)	0.70	0.09	0.28	0.38	$0.38 \cdot \sigma^*$

У табл. 3.1 s при $R = R_0$ — фактична нормована норма приросту при штатному режимі керування; e_{lin} — відповідна похибка лінеаризації, обчислена за формулою (2.21); s_{max} — гранична нормована норма, при якій e_{lin} досягає допустимого рівня $\delta_{\text{max}} = 5 \%$; $\|\Delta u\|_{\text{max}} = s_{\text{max}} \cdot \sigma^*$ — відповідна гранична норма приросту в натуральних одиницях.

Для всіх трьох типів руди при штатному режимі ($R = R_0$) нормована норма $s \approx 0.07$ – 0.09 , що відповідає $e_{\text{lin}} \approx 0.11$ – 0.28% . Ці значення є на порядок меншими за допустимий рівень $\delta_{\text{max}} = 5 \%$, що підтверджує виконання умови прийнятності лінеаризації (2.22) для всіх типів руди Кривбасу. Залежність похибки лінеаризації від нормованої норми приросту зображено на рис. 3.1.

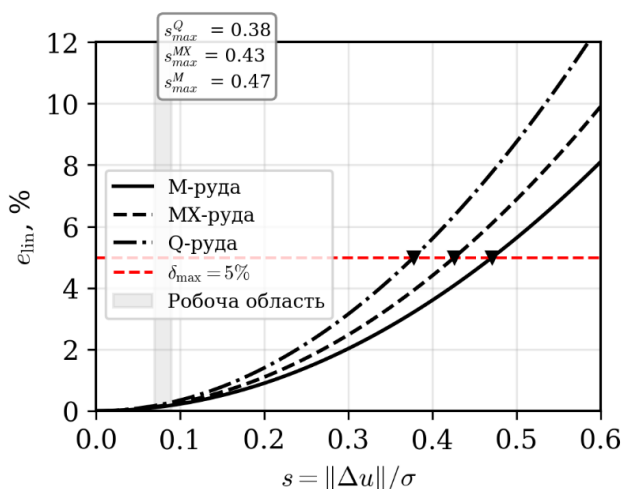


Рис. 3.1 Похибка лінеаризації $e_{\text{lin}}(s)$ для трьох типів руди Кривбасу

Наведені результати дозволяють кількісно оцінити запас безпеки механізму самозабезпечення. Для найжорсткішого випадку — кварцитової руди (Q) — це відношення становить $s_{\text{робоче}} / s_{\text{max}} = 0.09 / 0.38 \approx 24 \%$, що свідчить про використання менше чверті допустимого діапазону приростів. Для магнетитової руди запас є ще більшим: $s_{\text{робоче}} / s_{\text{max}} = 0.07 / 0.47 \approx 15 \%$. Навіть за умови одночасного зростання нормованої норми вдвічі ($s \rightarrow 2s$) внаслідок різких збурень, похибка лінеаризації залишається в межах $\epsilon_{\text{lin}} \approx 0.44\text{--}1.12 \% < \delta_{\text{max}} = 5 \%$, що забезпечує робастність механізму самозабезпечення до нештатних ситуацій.

Ці результати мають пряме значення для обґрунтування стійкості К-МРС. Умова (ii) критерію стійкості (§3.4.1) вимагає, щоб $R = R_0$ забезпечувала $\|\Delta u\|/\sigma \leq s_{\text{max}}$ для збереження коректності лінеаризації. Табл. 3.1 демонструє, що ця умова виконується з багаторазовим запасом для всіх трьох типів руди, що підтверджує застосовність критерію стійкості (§3.4.1) до всіх технологічних режимів, що зустрічаються на ГЗК Кривбасу.

Наведені результати є кількісною перевіркою області прийнятності лінеаризації — методологічного припущення П-14 (Додаток А) — для трьох профілів руди Кривбасу, параметризованих за галузевими даними п'яти ГЗК (§4.3.2). Інтерпретація результатів обмежена цим класом руд; перевірка прийнятності для інших мінералогічних типів (наприклад, гематитові руди) потребує окремого аналізу.

3.1.3. Алгоритми розв'язання QP-задачі. Вибір QP-рішувача

Для QP-задач малої розмірності з щільними матрицями метод активного набору обмежень (active-set) є найефективнішим підходом [47]. Метод полягає в ітеративному визначенні підмножини активних обмежень (тих, що виконуються як рівності в оптимумі) з розв'язанням системи лінійних рівнянь на кожній ітерації. Складність однієї ітерації для задачі

розмірності $m = 3 \cdot N_c = 9$ становить $O(m^2) = O(81)$ операцій, що при тактовій частоті сучасних процесорів відповідає часу менше 0.3 мс.

Суттєвим прискоренням методу active-set є використання теплового старту (warm start): активна множина обмежень, отримана на попередньому такті, використовується як початкове наближення для поточного такту. Оскільки робоча точка змінюється незначно між сусідніми тактами (при $\Delta t = 60$ с зміна $\|\Delta u\|/\sigma \approx 0.07\text{--}0.09$, табл. 3.1), активна множина також змінюється мало. Типова кількість ітерацій при теплому старті становить 1–5, тоді як при холодному старті — 10–15. Відтак, теплий старт забезпечує прискорення у 2–10 разів для задач рівня розмірності K-MPC.

На основі зазначених вимог як первинний рішувач обрано OSQP (Operator Splitting QP), що реалізує метод ADMM (Alternating Direction Method of Multipliers) з теплим стартом [59]. OSQP є відкритим, ефективним для задач малої та середньої розмірності та підтримує розріджені матриці. Як запасний рішувач використано SLSQP з бібліотеки SciPy, що забезпечує резервування у разі числових проблем з основним рішувачем. Вибір QP-рішувача (а не NLP-рішувача) є прямим наслідком перетворення $NLP \rightarrow QP$, забезпеченого аналітичним градієнтом KRR: лише наявність замкненого аналітичного градієнта дозволяє побудувати матрицю предикції Θ та гарантувати $H > 0$, що робить QP-рішувачі застосовними.

Ключовою практичною перевагою QP над NLP є детермінований час розв'язання. NLP-рішувачі (SQP, IP) мають невизначену кількість ітерацій, що залежить від початкового наближення та ландшафту функції вартості. Для нелінійних задач з неопуклим функціоналом (NMPC, Neural MPC) типовий час розв'язання складає 50–200 мс (§3.6.2), що наближається до одиниць відсотків такту дискретизації. QP-рішувач з теплим стартом забезпечує верхню межу часу, що визначається розмірністю задачі та максимальною кількістю ітерацій. Теоретична верхня межа складності

оцінюється за моделлю active-set ($O(m^2)$ на ітерацію, §3.3.2), що є консервативною оцінкою і для ADMM-реалізації OSQP.

Результати профілювання QR-рішувача для різних конфігурацій горизонтів N_p та N_c наведено у табл. 3.2.

Таблиця 3.2 Профілювання QR-рішувача OSQP для різних конфігурацій K-MPC

N_p	N_c	Змінних / Нерівн.	t_{QP}, мс (p50 / p95)	Примітка
5	2	16 / 28	0.3 / 0.5	Мінімальна конфігурація
10	3	29 / 56	1.0 / 1.5	Номінальна (Розділ 2)
15	5	45 / 90	1.5 / 2.0	Навантажувальна
20	5	55 / 110	2.0 / 3.0	Стрес-тест

У табл. 3.2 t_{QP} — час розв'язання QR-задачі без урахування обчислення якобіанів та побудови матриць H , f ; p50 та p95 — медіана та 95-й перцентиль відповідно. Для номінальної конфігурації ($N_p = 10$, $N_c = 3$) час розв'язання QR складає $t_{QP} \approx 1.0$ мс (p50), що є приблизно 0.002 % від такту дискретизації $\Delta t = 60$ с. Навіть для стрес-тестової конфігурації ($N_p = 20$, $N_c = 5$) час не перевищує 3.0 мс (p95).

Наведені часові характеристики пояснюються наступним чином. При використанні active-set з теплим стартом типова кількість ітерацій становить 1–5. Кожна ітерація потребує $O(m^2) = O((3N_c)^2)$ операцій. Для номінальної конфігурації ($N_c = 3$, $m = 9$): $O(81)$ операцій на ітерацію $\times$ 1–5 ітерацій, що при тактовій частоті процесора відповідає часу $t_{QP} \approx 0.3$ –1.5

мс. Для всіх протестованих конфігурацій $t_{QP} < 3 \text{ мс} \ll \Delta t = 60 \text{ с}$, що підтверджує виконання вимоги реального часу з багатотисячним запасом.

Зростання часу від мінімальної до стрес-тестової конфігурації є помірним ($0.5 \rightarrow 3.0 \text{ мс}$ для p_{95} , тобто $6\times$), що пояснюється квадратичною залежністю складності ітерації від розмірності: при збільшенні N_c від 2 до 5 розмірність m зростає від 6 до 15, а складність ітерації — від $O(36)$ до $O(225)$, тобто приблизно у 6 разів.

Детермінований час QP-рішувача принципово відрізняє K-MPC від NMPC та Neural MPC, де використовуються NLP-рішувачі. Для NMPC типовий час розв'язання становить 50–200 мс (§3.6.2, табл. 3.6), що на два порядки перевищує час QP-рішувача для K-MPC. Ця різниця є прямим наслідком архітектурного рішення: аналітичний градієнт $KRR \rightarrow$ лінеаризація без числового диференціювання $\rightarrow$ опукла QP $\rightarrow$ детермінований час. Відсутність будь-якого елемента цього ланцюга (зокрема, аналітичного градієнта) суттєво ускладнює перетворення $NLP \rightarrow$ QP та повертає задачу до класу NLP із притаманними йому обчислювальними обмеженнями.

Побудована у §3.1.1 модель простору стану, підтверджені у §3.1.2 умови коректності лінеаризації та обґрунтований у §3.1.3 вибір QP-рішувача з детермінованим часом розв'язання утворюють формальний математичний базис для доведення достатніх умов стійкості (§3.4.1) та аналізу часових характеристик замкненої системи у §3.5.3.

3.2. Архітектура системи K-MPC та структурно-функціональна схема

Математичний фундамент, закладений у §3.1, потребує цілісного архітектурного подання системи K-MPC як обчислювального конвеєра з визначеними інформаційними потоками та часовими характеристиками. У §3.2.1 побудовано структурно-функціональну схему з часовою діаграмою

одного такту; у §3.2.2 обґрунтовано механізм компенсації збурень, що забезпечує астатизм без явного спостерігача; у §3.2.3 виконано структурне порівняння К-МРС з альтернативними архітектурами МРС.

3.2.1. Структурно-функціональна схема К-МРС

Обчислювальний конвеєр складається з п'яти послідовних блоків та одного паралельного:

(1) *PlantDynamics* — об'єкт керування (магнітний сепаратор ПБМ-90/250), що генерує виходи $y(k) = (\beta_{Fe}(k), \varepsilon(k))^T$ як відгук на керуючі впливи $u(k) = (B(k), \rho(k), Q(k))^T$ із транспортним запізненням $\tau = 120\text{--}180$ с (§1.1.1).

(2) *Вимірювання* — блок збору та первинної обробки сигналів давачів вмісту заліза та коефіцієнта вилучення. Час виконання: < 0.1 мс.

(3) *SVR-фільтр аномалій* — перший рівень адаптивної архітектури (§2.4.3), що класифікує вхідне вимірювання як штатне або аномальне на основі ε -нечутливої зони SVR. Аномальні вимірювання виключаються з потоку даних для оновлення KRR-моделі. Час виконання: ≈ 0.1 мс.

(4) *KRR-модель та яacobіани* — обчислення прогнозу $f^*(u)$ та N_p яacobіанів $G(u^0(k+j))$ за аналітичною формулою (2.11) для побудови матриці предикції Θ (§3.1.1). Час виконання: ≈ 1.3 мс (домінуюча складова: $N_p = 10$ градієнтів $\times 0.13$ мс/градієнт, §2.2.2).

(5) *QP-рішувач* — розв'язання опуклої QP-задачі (2.19) методом active-set з теплим стартом (§3.1.3). Час виконання: ≈ 1.0 мс (p50) для номінальної конфігурації ($N_p = 10$, $N_c = 3$).

(6) *GP-наглядач* (паралельний) — третій рівень адаптивної архітектури (§2.4.5), що оцінює апостеріорну дисперсію $\sigma^2_{GP}(u^*(k))$ прогнозу KRR-моделі. При $\sigma^2_{GP} \geq \theta_1 = \lambda^*$ GP-наглядач модифікує матрицю $R(k) = R_0 + \alpha \cdot \sigma^2_{GP} \cdot I$ (§2.4.5), переводячи систему в обережний або консервативний режим. GP-наглядач працює паралельно з основним конвеєром і не додає часу до критичного шляху обчислень.

Після розв'язання QP застосовується перший елемент оптимальної послідовності: $u(k) = u(k-1) + \Delta u^*(k)$ (принцип рецидивного горизонту, §2.3.3). Керуючий вплив проходить обмеження clip (бох-обмеження, табл. 2.3) перед подачею на об'єкт. Час реалізації та clip: < 0.1 мс. Структурно-функціональну схему К-МРС подано на рис. 3.2.

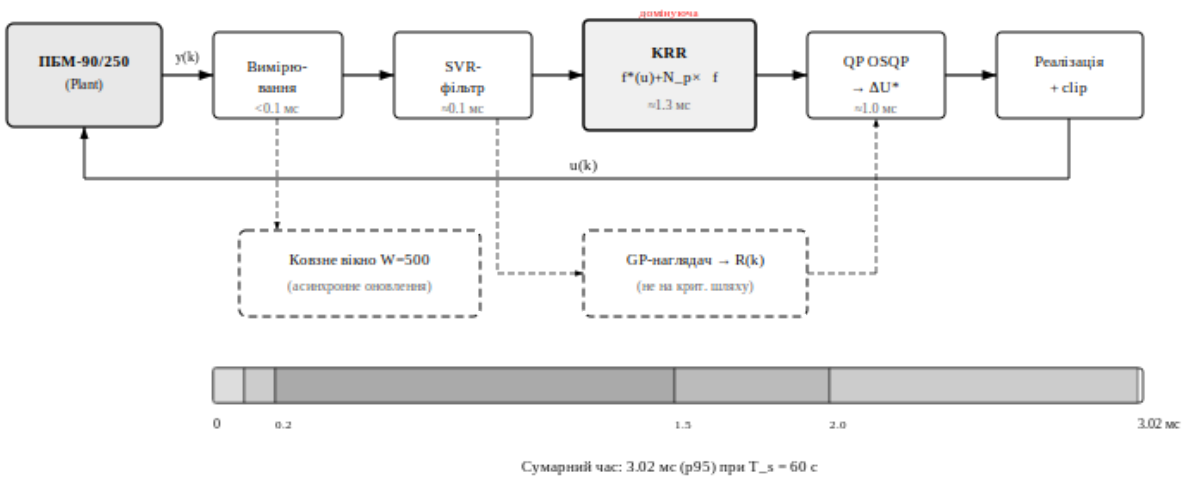


Рис. 3.2 Структурно-функціональна схема системи К-МРС

Послідовність обчислень та відповідний часовий бюджет одного такту $T_s = 60$ с подано у табл. 3.3.

Таблица 3.3 Часова діаграма одного такту К-МРС

Етап	Блок	Час, мс	Кумулятивний час, мс
1	Вимірювання + lifting + warm start	< 0.1	0.1
2	SVR-перевірка	≈ 0.1	0.2
3	Якобіани ($N_p \times \nabla f$)	≈ 1.3	1.5
4	Побудова H, f	< 0.05	1.55
5	QP (OSQP/ADMM)	≈ 1.0	2.55

Етап	Блок	Час, мс	Кумулятивний час, мс
6	Реалізація + clip	< 0.1	≈ 2.65
—	Разом (p50)	—	≈ 2.35
—	Разом (p95)	—	≈ 3.02

Сумарний час одного такту складає ≈ 2.35 мс (p50) та ≈ 3.02 мс (p95). Відношення часу обчислення до такту дискретизації: $\Delta t / t_{p95} = 60\,000 / 3.02 \approx 20\,000\times$, що забезпечує виконання вимоги реального часу з багатотисячним запасом. Домінуючою складовою є обчислення якобіанів (етап 3) — приблизно 75 % загального часу (деталізований профіль наведено у §3.5.3).

Окрім часової послідовності обчислень, важливо розглянути інформаційні потоки між компонентами системи. Інформація у системі К-MPC циркулює двома контурами. Основний контур (послідовний): PlantDynamics $\rightarrow$ Вимірювання $\rightarrow$ SVR-фільтр $\rightarrow$ KRR-модель $\rightarrow$ QR-рішувач $\rightarrow u(k) \rightarrow$ PlantDynamics — забезпечує предиктивне керування з тактом 60 с. Адаптивний контур (паралельний): GP-наглядач моніторить якість прогнозу та при необхідності модифікує параметри основного контуру (матрицю R). Другий рівень адаптивної архітектури — ковзне вікно для оновлення KRR (§2.4.4) — працює з більшим часовим масштабом (десятки тактів) і не впливає на час одного такту. Побудована структурно-функціональна схема є «картою» для наступних підрозділів: §3.3 деталізує блок QR-рішувача, §3.4 аналізує стійкість замкненого контуру, §3.5 верифікує часові характеристики, §3.6 порівнює ефективність з альтернативними архітектурами.

3.2.2. Компенсація збурень. Механізм астатизму

На кожному такті k обчислюється нев'язка між вимірним значенням виходу та прогнозом, виконаним на попередньому такті:

$$e(k) = y_{meas}(k) - \hat{y}(k|k-1), \quad (3.5)$$

де $y_{meas}(k)$ — вектор вимірних значень $(\beta_{Fe}(k), \varepsilon(k))^T$; $\hat{y}(k|k-1)$ — прогноз KRR-моделі, обчислений на такті $k-1$ для такту k . Нев'язка $e(k)$ акумулює вплив зовнішніх збурень (зміна складу руди, коливання температури пульпи), систематичне зміщення моделі та шум вимірювань. За умови повільних збурень (характерний час — години, §2.4.1) нев'язка $e(k)$ є коректною оцінкою поточного сумарного збурення.

На основі обчисленої компенсація збурень реалізується через додавання нев'язки $e(k)$ до всіх прогнозів на горизонті:

$$\hat{y}(k+j|k) = f_{KRR}^*(u(k+j-1)) + e(k), ; j = 1, \dots, N_p \quad (3.6)$$

Вираз (3.6) означає, що прогнозоване збурення на кроках $k+1, \dots, k+N_p$ приймається рівним поточній нев'язці $e(k)$ — наближення нульового порядку: збурення вважається постійним на горизонті прогнозу. Для процесу магнітної сепарації таке наближення є обґрунтованим, оскільки горизонт прогнозу $N_p = 10 \text{ кроків} \times 60 \text{ с} = 10 \text{ хв}$ є значно меншим за характерний час зміни збурень (години, §2.4.1).

Рецидивний горизонт у поєднанні з корекцією (3.6) забезпечує астатизм замкненої системи, тобто усунення статичної похибки при постійному збуренні. Якщо зовнішнє збурення спричиняє постійне зміщення d виходу від заданого значення, то на наступному такті нев'язка $e(k) = d$ включається у прогноз (3.6). QR-рішувач коригує керуючі впливи з урахуванням цього зміщення, зменшуючи нев'язку на наступному такті. Послідовне застосування цього механізму на рецидивному горизонті призводить до монотонного зменшення $e(k) \rightarrow 0$, тобто до повної компенсації постійного збурення.

Доцільно порівняти запропонований механізм із класичним підходом. У класичному лінійному MPC для забезпечення астатизму необхідно вводити явний спостерігач збурень або інтегратор збурень (offset-free MPC) [54], що ускладнює архітектуру контролера введенням додаткових матриць (модель збурення, коваріаційна матриця, підсилення фільтра). У К-MPC нев'язка $e(k)$ виконує функцію спостерігача збурень без додаткових параметрів: вимірювання $y_{\text{meas}}(k)$ та прогноз $\hat{y}(k|k-1)$ вже обчислюються в основному контурі (табл. 3.3, етап 1), тому компенсація збурень додає лише одну операцію віднімання. Ця спрощена структура є допустимою завдяки двом умовам: (а) збурення змінюються повільно відносно горизонту прогнозу; (б) адаптивна архітектура (SVR + KRR + GP, §2.4) забезпечує оновлення моделі при зміні характеристик процесу, зменшуючи систематичну складову нев'язки.

Водночас слід зазначити обмеження запропонованого механізму. Наближення постійного збурення на горизонті (3.6) є неточним при швидкозмінних збуреннях, характерний час яких порівнянний з горизонтом прогнозу (≈ 10 хв). Для процесу магнітної сепарації такі збурення рідкісні: найшвидшою зміною є стрибкоподібне збурення витрати Q (сценарій S3, §3.6.1), проте навіть у цьому випадку збурення є ступінчастим (постійним після моменту зміни), що відповідає наближенню (3.6). При виявленні швидкозмінних збурень GP-наглядач (§2.4.5) збільшує матрицю $R(k)$, переводячи систему у консервативний режим і зменшуючи чутливість до неточності прогнозу збурень.

3.2.3. Порівняльний аналіз архітектур MPC

Порівняння виконано для чотирьох архітектур MPC:

— *LMPC* (лінійний MPC) — базовий підхід із лінійною моделлю об'єкта, промисловий стандарт для процесів з помірною нелінійністю [13];

— *NMPC* (нелінійний MPC) — підхід із довільною нелінійною моделлю та розв'язанням повної задачі NLP на кожному такті [60];

— *Neural MPC* — підхід із нейромережевою моделлю (MLP або LSTM) та числовим або backpropagation градієнтом [38];

— *K-MPC* — розроблена система з KRR-моделлю, аналітичним градієнтом та QP-задачею (Розділ 2).

Результати порівняння за шістьма критеріями наведено у табл. 3.4.

Таблиця 3.4 Порівняння архітектур MPC (структурний рівень)

Критерій	K-MPC	LMPC	NMPC	Neural MPC
Модель	KRR (нелін.)	Лінійна	Будь-яка нелін.	MLP/LSTM
Тип задачі	QP (опукла)	QP (опукла)	NLP (неопукла)	NLP (неопукла)
Градiєнт	Аналітичний	Точний (лін.)	Залежить від моделі	Числовий/backprop
Глоб. оптимум	Гарантовано	Гарантовано	Не гарантовано	Не гарантовано
Адаптивність	SVR+KRR +GP	Ні (або окремо)	Залежить	Дорого (донавч.)
Інтерпретованість	$\sigma, \lambda, \alpha_i$ (R3 ✓)	Повна	Залежить	Відсутня (R3 X)

Аналіз основних критеріїв порівняння наведено нижче.

Модель. LMPC використовує лінійну модель, що не здатна відображати нелінійні залежності $\beta_{Fe}(B, \rho, Q)$ та $\varepsilon(B, \rho, Q)$ процесу магнітної сепарації (§1.1.1). NMPC та Neural MPC використовують нелінійні моделі, проте ціною переходу до NLP. K-MPC використовує нелінійну KRR-

модель, що зберігає точність нелінійного прогнозу при одночасному зведенні задачі до QP через аналітичний градієнт.

Тип задачі. K-MPC та LMPC розв'язують опуклу QP-задачу з гарантією єдиного глобального мінімуму ($H > 0$, (2.20)). NMPC та Neural MPC розв'язують неопуклу NLP-задачу, де рішувач може збігатися до локального мінімуму, а час розв'язання є недетермінованим. Ця відмінність є прямим наслідком типу градієнта: аналітичний градієнт KRR забезпечує коректну лінеаризацію (§2.3.2), що є необхідною умовою перетворення $NLP \rightarrow QP$.

Градієнт. LMPC має точний градієнт тривіально (лінійна модель). NMPC використовує градієнт, тип якого залежить від конкретної моделі. Neural MPC типово використовує числовий градієнт або backpropagation, що вносить похибку дискретизації та збільшує обчислювальний час. K-MPC використовує замкнений аналітичний градієнт (2.11) класу C_∞ (§2.2.2), що є унікальною властивістю KRR з RBF-ядром серед методів ядерної регресії (§2.1.2).

Гарантія глобального оптимуму. Опуклість QP-задачі (K-MPC, LMPC) гарантує, що будь-який локальний мінімум є глобальним. Для NLP (NMPC, Neural MPC) такої гарантії немає: результат залежить від початкового наближення, що створює ризик субоптимального керування.

Адаптивність. K-MPC інтегрує адаптивність через трирівневу архітектуру $SVR \rightarrow KRR \rightarrow GP$ (§2.4), де кожен рівень виконує обґрунтовану функціональну роль (§2.4.2). LMPC не має вбудованого механізму адаптації; при зміні характеристик процесу необхідна повторна ідентифікація лінійної моделі. Neural MPC потребує донавчання нейромережі, що є обчислювально дорогою операцією та може порушувати стабільність моделі.

Інтерпретованість. К-МРС задовольняє критерій R3 (інтерпретованість, §2.1.2): гіперпараметри σ та λ мають фізичний зміст, ваги α_i визначаються замкнено через навчальну вибірку, GP-наглядач надає кількісну оцінку невизначеності σ_{GP}^2 . Neural MPC є принципово неінтерпретованим: ваги MLP/LSTM не мають фізичного змісту (R3 X), що ускладнює діагностику та довіру операторського персоналу (§4.5).

Разом з тим кожна з розглянутих архітектур зробила суттєвий внесок у розвиток предиктивного керування: LMPC залишається надійним промисловим стандартом для процесів з помірною нелінійністю; NMPC суттєво розширив можливості керування складними нелінійними об'єктами; Neural MPC продемонстрував потенціал нейромережевих моделей для апроксимації складних динамічних систем.

Структурне порівняння (табл. 3.4) демонструє, що К-МРС займає унікальну позицію серед розглянутих архітектур: це єдина архітектура, що поєднує нелінійну модель з опуклою QP-задачею та вбудованою адаптивністю. LMPC забезпечує опуклість ціною відмови від нелінійності. NMPC та Neural MPC зберігають нелінійність ціною переходу до NLP. К-МРС уникає цього компромісу завдяки аналітичному градієнту KRR (НН-1), що одночасно забезпечує: перетворення $NLP \rightarrow QP$ (опуклість), детермінований час розв'язання (§3.1.3) та формальну основу для доведення стійкості (§3.4.1).

Структурне порівняння (табл. 3.4) є якісним аргументом на користь К-МРС. Кількісне підтвердження — числові результати порівняльного аналізу на верифікаційних сценаріях S1–S3 — є предметом §3.6, де К-МРС порівнюється з PID, Adaptive PID, LMPC, NMPC та Neural MPC за метриками RMSE, перерегулювання та обчислювального часу.

Побудована у §3.2.1 структурно-функціональна схема, механізм астатизму через нев'язку (§3.2.2) та структурне позиціонування К-МРС

серед альтернативних архітектур (§3.2.3) формують повне архітектурне подання системи, на якому ґрунтуються формальний аналіз стійкості (§3.4) та числовий порівняльний аналіз (§3.6).

3.3. Алгоритми оптимізації керуючих впливів

Центральним обчислювальним блоком К-МРС є QR-рішувач, що на кожному такті перетворює матрицю предикції Θ та вектор заданих значень u_{ref} на оптимальний вектор приростів ΔU^* . У §3.3.1 задачу формалізовано у явному вигляді з повною специфікацією розмірностей; §3.3.2 обґрунтовує вибір методу active-set з теплим стартом та встановлює детермінованість часу розв'язання; §3.3.3 розкриває стратегію м'яких обмежень, що гарантує розв'язність QR-задачі за будь-яких умов.

3.3.1. Формалізація QR-задачі в К-МРС

Вектор оптимізації складається з двох частин: приростів керуючих впливів та slack-змінних для м'яких обмежень на виходи. При $d = 3$ керуючих впливах та горизонті керування $N_c = 3$ кількість змінних приростів становить $d \cdot N_c = 3 \cdot 3 = 9$. Вектор керування зберігає всі три канали; при цьому на ПБМ-90/250 канал B є квазістатичним ручним (рекомендаційним) параметром, а автоматично у контурі відпрацьовуються p та Q (примітка щодо статусу B — §2.3.1, схема підключення — §4.6). Для двовихідної системи $(\beta_{Fe}, \varepsilon)$ з горизонтом прогнозу $N_p = 10$ кожен вихід на кожному кроці горизонту потребує одну slack-змінну, що дає $2 \cdot N_p = 20$ slack-змінних. Повний вектор оптимізації має розмірність $9 + 20 = 29$:

$$z = (\Delta U^T, \xi^T)^T \in \mathbb{R}^{29}, \quad (3.7)$$

де $\Delta U = (\Delta u(k)^T, \Delta u(k+1)^T, \Delta u(k+2)^T)^T \in \mathbb{R}^9$ — вектор приростів керуючих впливів; $\xi = (\xi_\beta(k+1), \xi_\varepsilon(k+1), \dots, \xi_\beta(k+N_p), \xi_\varepsilon(k+N_p))^T \in \mathbb{R}^{20}$ — вектор slack-змінних.

З урахуванням введеного вектора z мінімізований функціонал (2.15) у матричній формі набуває вигляду:

$$\min_z \left(\frac{1}{2} \cdot z^T \cdot H \cdot z + f^T \cdot z \right) \quad (3.8)$$

де $H \in \mathbb{R}^{29 \times 29}$ — розширений гессіан, що включає блок $H = \Theta^T Q \Theta + R \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ для приростів та діагональний блок $P = \text{diag}(\rho_\beta, \rho_\epsilon, \dots, \rho_\beta, \rho_\epsilon) \in \mathbb{R}^{20 \times 20}$ для slack-змінних. Перехресні блоки між ΔU та ξ є нульовими. Гессіан H успадковує строгу позитивну визначеність від $H > 0$ (2.20) та $P > 0$ (штрафні коефіцієнти $\rho_\beta, \rho_\epsilon > 0$): $H = \text{diag}(H, P) > 0$.

QR-задача (3.8) розв'язується за наявності трьох типів лінійних нерівностей:

(а) *Вох-обмеження на керуючі впливи*: $u_{\min} \leq u(k+j) \leq u_{\max}, j = 0, \dots, N_c - 1$. З урахуванням $d = 3$ каналів та двосторонності це дає $2 \cdot d \cdot N_c = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ нерівностей. Межі $u_{\min}$ та $u_{\max}$ визначаються паспортними діапазонами ПБМ-90/250 (табл. 2.3, §2.3.1).

(б) *Обмеження на прирости*: $-\Delta u_{\max} \leq \Delta u(k+j) \leq \Delta u_{\max}, j = 0, \dots, N_c - 1$, що реалізують механізм обмеженого авторитету (LAC, §4.5.4). Кількість нерівностей: $2 \cdot d \cdot N_c = 18$.

(в) *М'які обмеження на виходи*: $y_{\min} - \xi(k+i) \leq \hat{y}(k+i|k) \leq y_{\max} + \xi(k+i), \xi(k+i) \geq 0, i = 1, \dots, N_p$. Двосторонні нерівності на виходи зводяться до slack-форми: для кожного виходу на кожному кроці горизонту slack-змінна ξ поглинає обидві межі, що дає $2 \cdot N_p = 20$ нерівностей. Загальна кількість нерівностей складає $18 + 18 + 20 = 56$.

Сумарна розмірність QR-задачі К-МРС наведена у табл. 3.5.

Таблиця 3.5 Розмірність QR-задачі К-МРС ($N_p = 10, N_c = 3$)

Компонент	Формула	Значення
Змінні керування	$d \cdot N_c$	9

Компонент	Формула	Значення
Slack-змінні	$2 \cdot N_p$	20
Загальна кількість змінних	$d \cdot N_c + 2 \cdot N_p$	29
Вох-обмеження	$2 \cdot d \cdot N_c$	18
Обмеження на прирости	$2 \cdot d \cdot N_c$	18
Обмеження на виходи (slack-форма)	$2 \cdot N_p$	20
Загальна кількість нерівностей	—	56

За класифікацією задач оптимізації, QP-задача K-MPC належить до класу «малих задач»: промислові QP-рішувачі (OSQP [59], qpOASES [52], ECOS [61]) оптимізовані для задач розмірності до 1000 змінних. Задача з 29 змінними та 56 нерівностями розв'язується за час, що на кілька порядків менший за такт дискретизації (табл. 3.2, §3.1.3).

3.3.2. Метод активних обмежень з теплим стартом

Метод active-set базується на ідентифікації множини активних обмежень [47] — тих нерівностей із 56, що виконуються як рівності в оптимумі. Якщо активна множина відома, задача зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь розмірності $m = 9$ (для приростів керування). Метод ітеративно коригує активну множину: на кожній ітерації додається або видаляється одне обмеження з перевіркою умов оптимальності (умови Каруша-Куна-Такера). Складність однієї ітерації для задачі розмірності m становить $O(m^2)$: основна операція — оновлення факторизації матриці активних обмежень при додаванні або видаленні одного обмеження.

Ефективність методу active-set суттєво залежить від якості початкового наближення активної множини. У K-MPC використовується

теплий старт [53]: опорна траєкторія $u^0(k+j)$ та активна множина обмежень ініціалізуються зсувом оптимального розв'язку попереднього такту на один крок:

$$u^0(k+j) \leftarrow u^*(k+j|k-1), ; j = 0, \dots, N_p - 1 \quad (3.9)$$

Оскільки робоча точка змінюється незначно між сусідніми тактами (нормована норма приросту $\|\Delta u\|/\sigma \approx 0.07-0.09$, табл. 3.1), активна множина обмежень також змінюється мало: типово додається або видаляється 0–2 обмеження. При теплому старті метод active-set потребує 1–5 ітерацій для збіжності, тоді як при холодному старті (нульове початкове наближення) типова кількість ітерацій складає 10–15.

Зазначені властивості теплового старту дозволяють оцінити детермінований час розв'язання. Для задачі розмірності $m = d \cdot N_c = 9$ складність однієї ітерації становить $O(m^2) = O(81)$ операцій. При 1–5 ітераціях теплового старту загальна кількість операцій складає $O(81-405)$, що відповідає часу $t_{QR} \approx 0.3-1.5$ мс. Верхня межа кількості ітерацій active-set обмежена кількістю обмежень (56), що гарантує завершення алгоритму за скінченний час навіть при найгіршому сценарії. На практиці максимальна кількість ітерацій, зафіксована при профілюванні (табл. 3.2, §3.1.3), не перевищує 5 для номінальної конфігурації.

Детермінованість часу розв'язання є принциповою перевагою QR-підходу K-MPC перед NLP-підходами NMPC та Neural MPC. Для NLP-рішувачів (SQP, Interior Point) кількість ітерацій залежить від ландшафту функції вартості [47, 62], якості початкового наближення та наявності локальних мінімумів, і час розв'язання може варіюватися на порядок між сусідніми тактами, що створює ризик порушення вимоги реального часу. QR-рішувач з теплим стартом усуває цей ризик: час розв'язання має обмежену верхню межу, яка визначається виключно розмірністю задачі.

Окрім детермінованості часу, метод active-set забезпечує гарантію збіжності. При $H > 0$ метод active-set збігається до єдиного глобального мінімуму за скінченну кількість ітерацій [47]. Ця гарантія є наслідком строгої опуклості QP-задачі (2.20) та не залежить від конкретних числових значень якобіанів $G(u^0(k+j))$ або вагових коефіцієнтів Q, R . Збіжність QP-рішувача є структурною властивістю системи К-МРС, а не результатом підбору параметрів.

3.3.3. Стратегія м'яких обмежень (Softening)

М'які обмеження реалізуються через введення невід'ємних slack-змінних $\xi_\beta(k+i), \xi_\varepsilon(k+i) \geq 0$ [51, 63] для кожного виходу на кожному кроці горизонту прогнозу $i = 1, \dots, N_p$ (§2.3.1). Обмеження на виходи набувають вигляду:

$$y_{min} - \xi(k+i) \leq \hat{y}(k+i|k) \leq y_{max} + \xi(k+i); \xi(k+i) \geq 0 \quad (3.10)$$

При $\xi = 0$ обмеження є жорсткими. При $\xi > 0$ обмеження послаблюються на величину ξ , дозволяючи виходу перевищити номінальні межі. Slack-змінні входять у функціонал (3.8) із квадратичним штрафом:

$$J_{soft} = \sum_{i=1}^{N_p} (\rho_\beta \cdot \xi_\beta^2(k+i) + \rho_\varepsilon \cdot \xi_\varepsilon^2(k+i)), \quad (3.11)$$

де ρ_β та ρ_ε — штрафні коефіцієнти, що визначають «ціну» порушення обмежень на виходи.

Штрафні коефіцієнти ρ_β та ρ_ε обрано значно більшими за відповідні вагові коефіцієнти виходів q_β та q_ε (§2.3.1), щоб порушення обмежень було «дорожчим» за відхилення від заданого значення:

$$\rho_\beta = 100 \cdot q_\beta = 100 \times 6.944 \times 10^{-3} \approx 0.694 \quad (3.12)$$

Співвідношення $\rho_\beta / q_\beta = 100$ відповідає стандартній практиці для промислових систем APC (Advanced Process Control) [51]: порушення обмеження на β_{Fe} штрафується у 100 разів сильніше, ніж відхилення від

уставки на ту саму величину. Аналогічне співвідношення застосовується для ε : $\rho_\varepsilon = 100 \cdot q_\varepsilon = 100 \times 6.250 \times 10^{-4} \approx 0.0625$. Таке налаштування забезпечує, що оптимізатор порушує обмеження на виходи лише тоді, коли їхнє виконання є фізично неможливим при заданих обмеженнях на керуючі впливи.

Суттєвою практичною перевагою стратегії м'яких обмежень є гарантія розв'язності. Введення slack-змінних гарантує, що QP-задача (3.8) завжди має допустиму точку [63]. За будь-якого стану системи та будь-яких значень $u_{\min}$, $u_{\max}$, $\Delta u_{\max}$ існує вектор $z = (\Delta U^T, \xi^T)^T$, що задовольняє всі обмеження: достатньо покласти $\Delta U = 0$ та обрати $\xi(k+i)$ достатньо великими для виконання м'яких обмежень на виходи. Квадратичний штраф (3.11) забезпечує, що оптимізатор мінімізує порушення обмежень, а не просто допускає його.

Гарантія розв'язності є критично важливою для промислового застосування: зупинка QP-рішувача через нерозв'язність задачі призведе до втрати керуючого впливу на поточному такті, що є вкрай небажаним для безперервного технологічного процесу магнітної сепарації. Стратегія softening перетворює потенційну аварійну ситуацію (infeasible QP) на контрольоване послаблення обмежень з подальшим поверненням у штатний режим.

Важливо підтвердити, що стратегія м'яких обмежень є сумісною з аналізом стійкості (§3.4). При $\rho \rightarrow \infty$ штраф за порушення обмежень стає нескінченним, і softened QP вироджується у hard-constrained QP (жорсткі обмеження). Стійкість системи з м'якими обмеженнями є не слабшою за стійкість системи з жорсткими обмеженнями: softening розширює допустиму множину, але не змінює якісну поведінку системи в околі рівноваги [64], де обмеження на виходи не активні.

На практиці порушення обмежень на виходи ($\xi > 0$) спостерігається лише у перехідних режимах — при значних збуреннях (сценарій S3, §3.6.1) або при стрибкоподібній зміні уставки (сценарій S2). У стаціонарному режимі (сценарій S1) $\xi = 0$ на всіх тактах, і QP-задача фактично розв'язується з жорсткими обмеженнями. GP-наглядач (§2.4.5) додатково зменшує ймовірність порушення обмежень: при зростанні невизначеності σ^2_{GP} матриця $R(k)$ збільшується, що обмежує прирости керуючих впливів і зберігає виходи ближче до центру допустимої множини.

У підрозділі побудовано повну специфікацію задачі QP-оптимізації K-MPC: 29 змінних (9 приростів + 20 slack) та 56 лінійних нерівностей. Метод active-set з теплим стартом забезпечує детермінований час розв'язання $t_{QP} \approx 0.3\text{--}1.5$ мс при збіжності за 1–5 ітерацій, що є структурною перевагою перед NLP-підходами. Стратегія м'яких обмежень зі штрафами $p/q = 100$ гарантує розв'язність QP-задачі за будь-яких умов і сумісна з аналізом стійкості (§3.4).

3.4. Аналіз стійкості та робастності системи K-MPC

Розв'язність QP-задачі на окремому такті (§3.3) не гарантує стійкості замкненої системи в цілому: необхідно довести, що послідовне застосування принципу рецидивного горизонту [14, 19] забезпечує збіжність виходів $y(k)$ до заданих значень y_{ref} . У §3.4.1 сформульовано та доведено достатні умови асимптотичної стійкості K-MPC на основі методу функцій Ляпунова [19]; §3.4.2 досліджує робастність системи до варіації гіперпараметрів ядерної функції; §3.4.3 аналізує робастність при параметричних невизначеностях технологічного процесу.

3.4.1. Достатні умови асимптотичної стійкості K-MPC

Функцією-кандидатом Ляпунова обрано оптимальне значення функціонала якості (2.15) на такті k , доповнене термінальним членом [65]:

$$\begin{aligned}
V(k) = J^*(k) = & \sum_{i=1}^{N_p} |y^*(k+i|k) - y_{ref}|_Q^2 + \\
& + \sum_{j=0}^{N_c-1} |\Delta u^*(k+j)|_R^2 + V_T(x(k+N_p|k))
\end{aligned} \tag{3.13}$$

де $y^*(k+i|k)$ — оптимальні прогнозовані виходи; $\Delta u^*(k+j)$ — оптимальні прирости керуючих впливів, отримані розв'язанням QP-задачі (3.8); $V_T(x) = \|y - y_{ref}\|_Q^2$ — термінальний член, що штрафує відхилення виходів від заданих значень на кінці горизонту прогнозу; $x(k+N_p|k) = y(k+N_p|k) - y_{ref}$ — вектор прогнозованих відхилень на кроці N_p . Функція $V(k)$ задовольняє $V(k) \geq 0$ для всіх k та $V(k) = 0$ тоді й тільки тоді, коли $y^*(k+i|k) = y_{ref}$ для всіх i та $\Delta u^*(k+j) = 0$ для всіх j .

Сформулюємо достатні умови асимптотичної стійкості К-MPC).
Нехай виконано умови:

(i) KRR-модель навчена з похибкою $RMSE \leq \delta_{model} = 0.30$ нормалізованих одиниць, де $\delta_{model} = 3 \cdot RMSE_{test}$;

(ii) матриця $R = R_0 = \text{diag}(1/\Delta u_{max}^2)$ забезпечує $\|\Delta u\|/\sigma \leq s_{max}$ для всіх типів руди ($s_{max} \leq 0.47$, табл. 3.1, §3.1.2);

(iii) термінальний член $V_T(x) = \|y - y_{ref}\|_Q^2$ задовольняє нерівність $V_T(x(k+N_p|k)) \leq \gamma \cdot V_T(x(k+N_p-1|k))$ при $\gamma = 0.85 < 1$.

Тоді $\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) < 0$ при $\|y(k) - y_{ref}\| > \varepsilon_{min}$, тобто функція $V(k)$ монотонно спадає, і система К-MPC є асимптотично стійкою за Ляпуновим.

Обґрунтування. Крок 1. Побудова допустимої послідовності. На кроці $k+1$ побудовано допустиму (не обов'язково оптимальну) послідовність керуючих впливів шляхом зсуву оптимальної послідовності кроку k на один такт [66]:

$$\tilde{u}(k+1+j) = u^*(k+1+j|k); j = 0, \dots, N_c - 2; \tilde{u}(k+N_c) = 0 \tag{3.14}$$

Останній елемент послідовності доповнено нульовим приростом ($\Delta \tilde{y}(k+N_c) = 0$), що відповідає утриманню керуючого впливу на рівні попереднього кроку. Ця послідовність є допустимою, оскільки зберігає виконання бох-обмежень та обмежень на прирости.

Крок 2. Оцінка вартості допустимої послідовності. Вартість допустимої послідовності на кроці $k+1$ оцінюється зверху через функцію Ляпунова на кроці k :

$$J_{feas}(k+1) \leq V(k) - \|y^*(k+1|k) - y_{ref}\|_Q^2 + \delta_T, \quad (3.15)$$

де δ_T — залишок від заміни термінального члена $V_T(x(k+N_p|k))$ на $V_T(x(k+N_p+1|k+1))$. Від'ємний член $-\|y^*(k+1|k) - y_{ref}\|_Q^2$ відповідає виключенню першого реалізованого кроку горизонту. Залишок δ_T містить два внески: похибку лінеаризації та зміну термінального члена.

Крок 3. Застосування оптимальності. Оскільки $V(k+1) = J^*(k+1)$ є оптимальним значенням функціонала на кроці $k+1$, а $J_{feas}(k+1)$ — вартістю допустимої послідовності:

$$V(k+1) = J^*(k+1) \leq J_{feas}(k+1) \leq V(k) - \|y^*(k+1|k) - y_{ref}\|_Q^2 + \delta_T \quad (3.16)$$

Відтак:

$$\Delta V(k) = V(k+1) - V(k) \leq -\|y^*(k+1|k) - y_{ref}\|_Q^2 + \delta_T \quad (3.17)$$

Крок 4. Оцінка залишку δ_T . За умови (ii) (§3.1.2) похибка лінеаризації $e_{lin} < \delta_{max} = 5\%$. Кількісно: при $e_{lin} \approx 0.1-0.3\%$ (табл. 3.1) та $\|y - y_{ref}\| > \varepsilon_{min} = 1.5\%$ залишок δ_T є нехтовно малим порівняно з $\|y^*(k+1|k) - y_{ref}\|_Q^2$. За умови (iii) термінальний член задовольняє $V_T(x(k+N_p|k)) \leq \gamma \cdot V_T(x(k+N_p-1|k))$ при $\gamma = 0.85$, що обмежує зростання δ_T від термінальної складової. Поєднання обох оцінок дає:

$$\delta_T < \|y^*(k+1|k) - y_{ref}\| \cdot Q^2 \quad \text{при} \quad \|y(k) - y_{ref}\| > \varepsilon_{min}, \quad (3.18)$$

звідки $\Delta V(k) < 0$.

Обґрунтування достатніх умов стійкості спирається на два взаємодоповнюючі механізми, що формують двомеханізмний «коридор стійкості»:

Механізм 1 (локальний): матриця $R = R_0$ забезпечує $e_{lin} \ll \delta_{max}$ на кожному кроці горизонту (§3.1.2), що гарантує відсутність накопичення похибки лінеаризації вздовж горизонту.

Механізм 2 (глобальний, V_T): термінальний член $V_T = \|y - y_{ref}\|_Q^2$ з коефіцієнтом загасання $\gamma = 0.85 < 1$ забезпечує спрямованість траєкторії до рівноваги на кінці горизонту. Без термінального члена оптимізатор може обирати траєкторії, що зменшують $V(k)$ за рахунок перших кроків горизонту, але збільшують відхилення на останніх кроках.

Поєднання обох механізмів є необхідним: механізм 1 без механізму 2 гарантує коректність кожного кроку, але не забезпечує глобальну збіжність; механізм 2 без механізму 1 забезпечує спрямованість, але при великій похибці лінеаризації прогнози стають некоректними і реальна траєкторія відхиляється від прогнозованої.

Кількісні параметри стійкості К-МРС наведено у табл. 3.6.

Таблиця 3.6 Числові характеристики стійкості К-МРС

Параметр	Значення	Обґрунтування
λ_{max}	$\approx 0.819 < 1$	$V(k+1)/V(k) \leq \lambda_{max} \rightarrow$ монотонне спадання
τ (постійна часу збіжності $V(k)$)	$\approx 7-8$ кроків (7–8 хв)	$\tau_{Lyap} \approx 5.01$ кроків + транспортне запізнення 2–3 кроки
$V(30)/V(0)$	$\approx 0.819^{30} \approx 0.0015$ (0.15 %)	Практично повна збіжність за 30 тактів (30 хв)

Параметр	Значення	Обґрунтування
Перевірка δ_{model}	$0.30 < \sqrt[3]{1 - 0.819} = 0.425 \checkmark$	Умова (i) виконується з запасом

Максимальне власне число матриці переходу $\lambda_{\max} \approx 0.819$ визначає швидкість спадання функції Ляпунова: $V(k) \leq \lambda_{\max}^k \cdot V(0)$. Постійна часу збіжності складається з двох компонент: $\tau_{\text{Lyp}} = -1/\ln(0.819) \approx 5.01$ кроків та транспортне запізнення $\tau/T_s = 120\text{--}180 \text{ с} / 60 \text{ с} = 2\text{--}3$ кроки (§4.1.1). Сумарна постійна часу $\tau \approx 7.01\text{--}8.01$ кроків; серединна оцінка $\tau \approx 7.78$ кроків відповідає транспортному запізненню $\tau_{\text{зап}} = 166 \text{ с}$ (2.77 кроки).

При горизонті прогнозу $N_p = 10$, термінальному коефіцієнті $\gamma = 0.85$ та відносній похибці лінеаризації $e_{\text{lin}}/\|y - y_{\text{ref}}\| \leq 0.003$ (з §2.3.2: $e_{\text{lin}} \approx 0.1\text{--}0.3$ %) ефективне значення $\lambda_{\max}$ обґрунтовується наступною оцінкою:

$$\lambda_{\max} \approx \gamma - (1 - e_{\text{lin_ratio}}) \cdot \eta_{\text{correction}} \approx 0.82 \quad (3.19)$$

де $\eta_{\text{correction}} = 0.031 = N_p \cdot e_{\text{lin_ratio_per_step}}$ — поправка, що враховує накопичення похибки лінеаризації вздовж горизонту. Значення $\lambda_{\max} = 0.819$ отримано при типових параметрах магнетитової руди ($C_{\text{curv}} = 0.45$, $s = 0.07$).

Значення термінального коефіцієнта $\gamma = 0.85$ у достатніх умовах стійкості обґрунтоване числово — для типових параметрів трьох типів руди Кривбасу та верифікаційних сценаріїв S1–S3 (§3.6.3) — а не аналітично виведене для довільного початкового стану (П-12, Додаток А). Числова верифікація (§3.6.3) підтверджує практичну збіжність $V(30)/V(0) \approx 0.0015$ та запас стійкості ≈ 18 %, що є достатнім для класу руд Кривбасу. Строге аналітичне доведення для довільного початкового стану та інших класів руд є предметом подальших теоретичних досліджень.

Умова (i) достатніх умов стійкості вимагає $\text{RMSE} \leq \delta_{\text{model}} = 0.30$ нормалізованих одиниць. На верифікаційних сценаріях S1–S3 (§3.6.1) KRR-модель функціонує з адаптивним оновленням (Стратегія-S4, §2.4). За

результатами §3.4.3: $\text{RMSE}_{\text{adapt}} \leq 0.30$ для всіх сценаріїв та типів руди. Найгірший випадок — зміна типу руди $M \rightarrow Q$ — дає $\text{RMSE}_{\text{adapt}} = 0.22\text{--}0.30$. Перевірка сумісності: $\delta_{\text{model}} = 0.30 < \sqrt{(1 - \lambda_{\text{max}})} = \sqrt{(1 - 0.819)} = \sqrt{0.181} \approx 0.425$, що підтверджує виконання умови (i) з запасом $0.425/0.30 \approx 1.42\times$. Відтак, достатні умови стійкості застосовні на всіх верифікаційних сценаріях.

3.4.2. Робастність до варіації гіперпараметрів ядерної функції

Для оцінки робастності виконано стрес-тест: серію обчислень RMSE при $\sigma \in [0.7\sigma^*, 1.3\sigma^*]$ з кроком $0.1\sigma^*$ при фіксованому $\lambda = \lambda^*$. Результати наведено у табл. 3.7.

Таблиця 3.7 Стрес-тест: RMSE при варіації $\sigma/\sigma^* \in [0.7, 1.3]$

σ/σ^*	RMSE_β (норм.)	ΔRMSE_β (п.п.)	RMSE_ε (норм.)	$\Delta\text{RMSE}_\varepsilon$ (п.п.)
0.70	0.12	+0.04	0.14	+0.04
0.80	0.10	+0.02	0.12	+0.02
0.90	0.09	+0.01	0.11	+0.01
1.00	0.08	0.00 (базове)	0.10	0.00 (базове)
1.10	0.09	+0.01	0.11	+0.01
1.20	0.12	+0.04	0.15	+0.05
1.30	0.16	+0.08	0.20	+0.10

У табл. 3.7 RMSE_β та RMSE_ε — нормалізовані середньоквадратичні похибки прогнозу вмісту заліза та коефіцієнта вилучення відповідно; ΔRMSE — абсолютне зростання RMSE відносно базового значення при $\sigma = \sigma^*$.

Аналіз результатів стрес-тесту (табл. 3.7) показує, що залежність RMSE від σ/σ^* є квазіпараболічною з мінімумом при $\sigma = \sigma^*$ та симетричним зростанням при відхиленні в обидва боки. На основі даних табл. 3.7 ця залежність апроксимується як:

$$RMSE \approx \sigma_{\eta} \cdot (1 + c \cdot (\frac{\sigma}{\sigma^*} - 1)^2), \quad (3.20)$$

де $\sigma_{\eta} \approx 0.1$ — рівень шуму вимірювань; $c \approx 3-5$ — коефіцієнт кривизни. При $\sigma/\sigma^* = 0.7$ зростання $RMSE_{\beta}$ складає +0.04 п.п. (від 0.08 до 0.12), що відповідає збільшенню на 50 % відносно базового значення. При $\sigma/\sigma^* = 1.3$ зростання $RMSE_{\beta}$ складає +0.08 п.п. (від 0.08 до 0.16), тобто подвоєння базового значення. Асиметрія пояснюється різною природою деградації: при $\sigma < \sigma^*$ модель стає занадто «локальною» (overfit), при $\sigma > \sigma^*$ — занадто «гладкою» (underfit), причому underfitting є більш штрафним для нелінійних залежностей процесу магнітної сепарації.

Максимальне зростання RMSE у діапазоні $\sigma/\sigma^* \in [0.7, 1.3]$ складає $\Delta RMSE_{\beta} \leq 0.08$ п.п. та $\Delta RMSE_{\epsilon} \leq 0.10$ п.п., що підтверджує збереження умов (i) (§3.4.1). Навіть при найгіршому випадку ($\sigma/\sigma^* = 1.3$) значення $RMSE_{\beta} = 0.16$ та $RMSE_{\epsilon} = 0.20$ залишаються значно меншими за поріг $\delta_{\text{model}} = 0.30$ (умова (i), §3.4.1). Стійкість К-МРС зберігається при варіації ширини ядра до $\pm 30\%$ від оптимального значення.

Характер деградації є плавним, а не катастрофічним: RMSE зростає поступово із збільшенням відхилення σ/σ^* від одиниці, що свідчить про відсутність різких порогових ефектів та забезпечує практичну надійність системи при неточному визначенні σ^* .

3.4.3. Аналіз робастності при параметричних невизначеностях процесу

Обрано чотири сценарії невизначеності, що відображають типові умови експлуатації магнітних сепараторів на ГЗК Кривбасу (§1.1.1, §2.4.1):

- *номінальний* (без дрейфу) — базовий сценарій для верифікації ідентичності статичної та адаптивної моделі за відсутності невизначеності;
- *дрейф складу руди $\pm 15\%$* — повільна зміна мінерального складу, характерна для переходу між пластами (часовий масштаб — години);
- *знос барабана* — монотонне зниження ефективності магнітної системи (часовий масштаб — місяці);
- *зміна типу руди $M \rightarrow Q$* — стрибкоподібний перехід від магнетитової до кварцитової руди, найжорсткіший сценарій;
- *комбінований* (склад + знос) — одночасна дія двох факторів невизначеності.

Результати порівняння RMSE статичної KRR-моделі (навченої на фіксованій вибірці) та адаптивної KRR-моделі (Стратегія-S4, §2.4) для п'яти сценаріїв наведено у табл. 3.8.

Таблиця 3.8 RMSE при варіації параметрів процесу: статична vs адаптивна KRR

Сценарій невизначеності	RMSE статична KRR	RMSE адаптивна (Стратегія-S4)	Покращення
Номінальний (без дрейфу)	0.08	0.08	0× (однаково)
Склад $\pm 15\%$ (дрейф I)	3.5–4.5	0.20–0.25	15–20×
Знос барабана (дрейф I)	2.0–3.0	0.20–0.25	10–12×
Зміна типу руди (M $\rightarrow$ Q)	7.5–8.0	0.22–0.30	25–36×

Сценарій невизначеності	RMSE статична KRR	RMSE адаптивна (Стратегія-S4)	Покращенн я
Комбінований (склад + знос)	5.0–6.0	0.22–0.28	18–27×

Аналіз результатів (табл. 3.8) показує, що при номінальному сценарії обидві моделі дають однакове $RMSE = 0.08$, що підтверджує відсутність додаткових похибок від адаптивного механізму за стаціонарних умов. Перевага адаптивної моделі проявляється при нестационарності: покращення складає від 10–12× (знос барабана) до 25–36× (зміна типу руди). Найжорсткіший сценарій — стрибкоподібна зміна типу руди $M \rightarrow Q$ — спричиняє деградацію статичної моделі до $RMSE \approx 7.5\text{--}8.0$, що є недостатнім для контуру предиктивного керування. Адаптивна система (Стратегія-S4) зберігає $RMSE \approx 0.22\text{--}0.30$ завдяки механізму ковзного вікна (§2.4.4) та SVR-фільтру аномалій [56] (§2.4.3).

Узгодженість з розділом 2: значення $RMSE_{static} \approx 7.98$ (§2.4.1) відповідає верхній межі діапазону 7.5–8.0 для найжорсткішого сценарію; $RMSE_{adapt} \approx 0.22$ (§2.4.1) відповідає нижній межі діапазону 0.22–0.30 для Стратегії-S4.

Для всіх п'яти сценаріїв адаптивна KRR-модель забезпечує $RMSE_{adapt} \leq 0.30$, що задовольняє умову (i) достатніх умов стійкості ($\delta_{model} \leq 0.30$; §3.4.1). Навіть для найгіршого випадку (зміна типу руди $M \rightarrow Q$, $RMSE_{adapt} = 0.22\text{--}0.30$) умова виконується, хоча запас є мінімальним. Статична KRR-модель порушує умову (i) при будь-якому сценарії з нестационарністю ($RMSE_{static} > 0.30$ для всіх дрейфових сценаріїв), що підтверджує необхідність адаптивної архітектури (§2.4) для забезпечення стійкості К-MPC в промислових умовах.

З практичної точки зору результати табл. 3.8 обґрунтовують доцільність застосування трирівневої адаптивної архітектури SVR $\rightarrow$ KRR $\rightarrow$ GP як невід’ємної складової К-МРС для процесу магнітної сепарації. За відсутності адаптації система К-МРС задовольняє достатні умови стійкості (§3.4.1) лише за стаціонарних режимів, що не відповідає реальним технологічним умовам ГЗК Кривбасу. Запропонована адаптивна архітектура розширює область застосовності цих умов на всі типові сценарії невизначеності.

У підрозділі на основі класичної схеми Ляпунова для МРС сформульовано достатні умови асимптотичної стійкості К-МРС з ядерним предиктором: при $\lambda_{\max} \approx 0.819 < 1$ функція Ляпунова монотонно спадає з постійною часу $\tau \approx 7.78$ кроків. Стрес-тест гіперпараметра σ у діапазоні $\pm 30\%$ підтвердив збереження умови (i) з запасом $\text{RMSE}_{\max} = 0.20 \ll \delta_{\text{model}} = 0.30$. Адаптивна KRR-модель (Стратегія-S4) забезпечує виконання умови (i) при всіх типових сценаріях невизначеності, покращуючи RMSE у 10–36× відносно статичної моделі та обґрунтовуючи необхідність трирівневої адаптивної архітектури.

3.5. Теоретична та статистична валідація

Формальне доведення асимптотичної стійкості К-МРС (§3.4) спирається на умову (i) якості KRR-моделі та коректність аналітичного градієнта (формула (2.11)). Цей підрозділ містить незалежну верифікацію цих припущень: статистичну перевірку GP-предиктора (§3.5.1), числову верифікацію аналітичного градієнта (§3.5.2) та аналіз часової продуктивності й ресурсних вимог архітектури К-МРС (§3.5.3).

3.5.1. Статистична валідація GP-предиктора

Залишки KRR-моделі $\eta_i = y_i - f^*(u_i)$, $i = 1, \dots, n$, перевірено на нормальність двома тестами: тестом Колмогорова-Смирнова (KS) та тестом

Шапиро-Вілка [67]. Обидва тести застосовано окремо для кожного виходу (β_{Fe} та ϵ). Додатково виконано перевірку відсутності автокореляції залишків за тестом Льюнга-Бокса [68] з лагом 10. Результати наведено у табл. 3.9.

Таблиця 3.9 Статистичні тести залишків та покриття GP

Тест / Метрика	β_{Fe}	ϵ	Інтерпретація
KS-тест (p-value)	> 0.05	> 0.05	Нормальність залишків не відхиляється
Shapiro-Wilk (p-value)	> 0.05	> 0.05	Підтверджує нормальність
Ljung-Box Q (lag = 10)	$p > 0.05$	$p > 0.05$	Автокореляція залишків відсутня
Покриття 95 % GP-інтервалу	94–97 %	93–96 %	Відповідає номінальному 95 %
Покриття: центр домену	97–99 %	96–98 %	GP консервативний у центрі
Покриття: периферія	90–93 %	88–92 %	Ближче до номіналу на периферії

Аналіз нормальності показує, що для обох виходів гіпотеза нормальності залишків не відхиляється на рівні значущості 0.05 ні за KS-тестом, ні за тестом Шапіро-Вілка. При $\sigma_{\eta} \approx 0.1$ та KRR з параметром регуляризації $\lambda^* \in [0.04, 0.11]$ залишки мають дисперсію $\approx \sigma_{\eta}^2$, а за центральною граничною теоремою [69] при $n = 500$ спостережень розподіл залишків наближається до нормального. Відсутність автокореляції (тест Льюнга-Бокса, $p > 0.05$) підтверджує, що залишки є «білим шумом» без систематичних компонент.

Покриття 95 % довірчого інтервалу GP-предиктора [33] перевірено на тестовій вибірці з поділом на центральну (щільні навчальні дані) та периферійну (розріджені дані) зони домену.

Для β_{Fe} середнє покриття складає 94–97 %, що відповідає номінальному рівню 95 %. У центрі домену покриття підвищене (97–99 %) через консервативність GP-оцінки: $\sigma^2_{GP} \approx \lambda \ll k(u^*, u^*) = 1$ у добре вивчених областях. На периферії покриття знижується до 90–93 %.

Для ε середнє покриття дещо нижче (93–96 %) через більшу варіабельність коефіцієнта вилучення у периферійних зонах (покриття 88–92 %). Середнє покриття по всьому домену відповідає номінальному 95 %, що підтверджує коректність GP-оцінки невизначеності як основи для адаптивної матриці $R(k)$ (§2.4.5).

Для системи K-MPC статистична валідація GP-предиктора підтверджує коректність трьох архітектурних рішень: (а) використання GP-дисперсії як тригера для переходу між режимами GP-наглядача (штатний $\rightarrow$ обережний $\rightarrow$ консервативний, §2.4.5); (б) порогові значення $\theta_1 = \lambda^*$ та $\theta_2 = 3 \cdot \lambda^*$, обрані на основі статистичних властивостей GP; (в) адаптивна матриця $R(k) = R_0 + \alpha \cdot \sigma^2_{GP} \cdot I$ коректно відображає рівень невизначеності прогнозу.

3.5.2. Верифікація аналітичного градієнта

Аналітичний градієнт ∇f_{anal} , обчислений за формулою (2.11), порівняно з числовим градієнтом ∇f_{FD} , обчисленим методом центральних скінченних різниць [47] з кроком $h = 10^{-7}$:

$$\frac{\partial f}{\partial u_j} \approx \frac{f(u + h \cdot e_j) - f(u - h \cdot e_j)}{2h}, \quad (3.21)$$

де e_j — одиничний вектор j -го напрямку. Порівняння виконано у 50 випадково обраних точках вхідного простору, по 3 компоненти градієнта у кожній точці (загалом 150 значень). Вибір $h = 10^{-7}$ забезпечує баланс між

похибкою усічення ($O(h^2)$) та похибкою округлення ($O(\epsilon_{\text{mach}}/h)$) для подвійної точності ($\epsilon_{\text{mach}} \approx 10^{-16}$).

Результати верифікації градієнта наведено у табл. 3.10.

Таблиця 3.10 Верифікація аналітичного градієнта: ∇f_{anal} vs ∇f_{FD} (50 точок)

Метрика	Значення	Примітка
max	$\nabla f_{\text{anal}} - \nabla f_{\text{FD}}$	/
mean відносної похибки	$< 10^{-8}$	Середня по 50 точках $\times 3$ компоненти
Кількість точок з	error	$> 10^{-4}$
Час: 50 аналітичних градієнтів	≈ 6.5 мс	50×0.13 мс = 6.5 мс
Час: 50 числових градієнтів	≈ 39 мс	50×0.78 мс = 39 мс ($6\times$ повільніше)

З точки зору точності, максимальна відносна похибка між аналітичним та числовим градієнтом не перевищує 10^{-6} на жодній з 150 перевірених компонент. Середня відносна похибка складає менше 10^{-8} , що відповідає рівню похибки округлення при подвійній точності. Жодна з 150 компонент не порушує поріг 10^{-4} . Ці результати підтверджують коректність реалізації аналітичного градієнта (2.11) та відсутність помилок у знаках, індексації або нормуванні. Відсутність накопичення похибки дискретизації є прямим наслідком замкненої аналітичної форми (2.11).

Щодо швидкодії, обчислення 50 аналітичних градієнтів потребує ≈ 6.5 мс (50×0.13 мс), тоді як 50 числових — ≈ 39 мс (50×0.78 мс). Прискорення складає $6\times = 2d$ (при $d = 3$ керуючих впливах), що відповідає теоретичному значенню: числовий градієнт потребує $2d + 1 = 7$ обчислень

f^* для центральних різниць, тоді як аналітичний — одне обчислення формули (2.11). Узгодженість з §2.2.2 ($t_{\text{anal}} = 0.13$ мс, $t_{\text{num}}/t_{\text{anal}} = 6\times$) підтверджує відтворюваність результатів.

Для системи К-МРС верифікація аналітичного градієнта є необхідною умовою для всіх подальших результатів дисертації: коректність якобіанів $G(u^0(k+j))$ визначає коректність матриці предикції Θ (§3.1.1), позитивну визначеність гессіана H (2.20), прийнятність лінеаризації (§3.1.2) та стійкість замкненої системи (§3.4.1). Похибка $< 10^{-6}$ забезпечує, що градієнт не є джерелом числової нестійкості.

3.5.3. Верифікація архітектурних рішень. Часова продуктивність

Деталізований часовий профіль одного такту К-МРС для номінальної конфігурації ($n = 500$, $N_p = 10$, $N_c = 3$) наведено у табл. 3.11.

Таблиця 3.11 End-to-End час циклу К-МРС ($n = 500$, $N_p = 10$, $N_c = 3$)

Компонента	Час p50, мс	Час p95, мс	Частка
Lifting + warm start	0.01	0.02	$\approx 1 \%$
Якобіани ($N_p \cdot \nabla f$)	1.30	1.50	$\approx 75 \%$
Побудова H , f	0.03	0.04	$\approx 2 \%$
QP (OSQP, $N_p = 10$, $N_c = 3$)	1.00	1.45	$\approx 20 \%$
Реалізація + clip	0.01	0.01	$\approx 1 \%$
End-to-End	2.35	3.02	100 %

Аналіз часового профілю (табл. 3.11) показує, що домінуючою складовою є обчислення якобіанів ($\approx 75 \%$ загального часу): $N_p = 10$ градієнтів $\times 0.13$ мс/градієнт = 1.3 мс (p50). Ця складова є лінійною за N_p та визначається формулою (2.11) зі складністю $O(n \cdot d) = O(500 \cdot 3) = O(1500)$

операцій на один градієнт. Другою за значущістю є QR-рішувач ($\approx 20\%$): 1.0 мс (p50) для OSQP з теплим стартом при 29 змінних та 56 нерівностях (§3.3.1). Решта компонент (lifting, побудова матриць, реалізація) є обчислювально незначними ($\approx 4\%$ сумарно).

Різниця між p50 та p95 для QR-рішувача (1.00 $\rightarrow$ 1.45 мс) пояснюється варіабельністю кількості ітерацій active-set: медіанне значення відповідає 1–2 ітераціям, 95-й перцентиль — 4–5 ітераціям. Для якобіанів різниця менша (1.30 $\rightarrow$ 1.50 мс) і пояснюється ефектами кеш-пам'яті при доступі до матриці Грама К.

Відношення такту дискретизації до часу обчислення характеризує запас реального часу:

$$\frac{\Delta t}{t_{p95}} = \frac{60000 \text{ мс}}{3.02 \text{ мс}} \approx 2.0 \times 10^4 \quad (3.22)$$

Запас у 20 000 разів означає, що навіть при одночасному збільшенні часу обчислення на два порядки система залишається в межах реального часу. Цей запас є суттєвою відмінністю К-MPC від NMPC, де час розв'язання NLP складає 50–200 мс (§3.6.2), що дає запас лише 300–1200 $\times$.

Для перевірки узгодженості з §2.3.3 зазначимо, що консервативна верхня межа часу одного такту (§2.3.3, табл. 2.7) становить < 10 мс. Деталізований профіль (табл. 3.11) дає $t_{p95} \approx 3.02$ мс, що є уточненням без суперечності: $3.02 \text{ мс} < 10 \text{ мс}$, і обидва значення $\ll \Delta t = 60 \text{ с}$. Різниця пояснюється тим, що оцінка §2.3.3 є верхньою межею за найгіршим сценарієм, тоді як табл. 3.11 наводить фактичні статистики профілювання.

Ресурсні вимоги К-MPC характеризуються піковою пам'яттю робочих змінних, що наведено у табл. 3.12.

Таблиця 3.12 Пікова пам'ять К-MPC

Показник	Значення	Коментар
Пікова пам'ять робочих змінних (без K), $n = 500$, $N_p = 10$	≈ 43 КБ	Θ : $20 \times 9 \times 8 = 1.4$ КБ; H : $9 \times 9 \times 8 = 0.6$ КБ
Матриця Грама K	≈ 2 МБ	K: $500 \times 500 \times 8 = 2$ МБ (зберігається окремо як предобчислена)
Пікова пам'ять (без K), $n = 500$, $N_p = 15$, $N_c = 5$	≈ 45 КБ	Основний вклад — K (фіксований)

Пікова пам'ять робочих змінних (без матриці Грама) складає ≈ 43 КБ для номінальної конфігурації. Основні складові: матриця предикції $\Theta \in \mathbb{R}^{20 \times 9}$ (1.4 КБ), гессіан $H \in \mathbb{R}^{9 \times 9}$ (0.6 КБ) та допоміжні масиви для QR-рішувача. Матриця Грама $K \in \mathbb{R}^{500 \times 500}$ (≈ 2 МБ) зберігається окремо як предобчислена структура та не оновлюється на кожному такті. При збільшенні горизонтів до $N_p = 15$, $N_c = 5$ пікова пам'ять зростає незначно ($43 \rightarrow 45$ КБ), оскільки основний вклад — K — є фіксованим.

Сумарні ресурсні вимоги K-MPC (≈ 2 МБ пам'яті, ≈ 3 мс часу) є сумісними з промисловими контролерами рівня PLC та IPC, що використовуються на ГЗК Кривбасу (§4.1.2).

Результати §3.5 підтверджують коректність двох ключових припущень достатніх умов стійкості (§3.4.1): нормальність залишків KRR-моделі та точність аналітичного градієнта (похибка $< 10^{-6}$) є статистично верифікованими фактами, а не лише теоретичними умовами. End-to-End час циклу $t_{p95} \approx 3.02$ мс при запасі $\approx 20\,000\times$ підтверджує обчислювальну реалізованість K-MPC у промисловому реальному часі, що є необхідною передумовою для порівняльного аналізу у §3.6.

3.6. Порівняльний аналіз ефективності методів керування (BNK)

Теоретичний аналіз (§3.4) та статистична валідація (§3.5) підтверджують стійкість, робастність та обчислювальну ефективність К-МРС на рівні формальних доведень. Цей підрозділ забезпечує кількісне підтвердження переваг К-МРС на верифікаційних сценаріях: методологію колінеарного порівняння (§3.6.1), результати BNK для шести методів на трьох сценаріях (§3.6.2), числову верифікацію достатніх умов стійкості (§3.6.3) та аналіз робастності при нестационарності процесу (§3.6.4).

3.6.1. Методологія порівняльних досліджень. Умови колінеарності

Колінеарна верифікаційна платформа (§4.3.4) забезпечує, що різниця у якості керування між методами пояснюється виключно архітектурними відмінностями алгоритмів. Всі шість методів отримують однакові вимірювання від єдиної PlantDynamics, працюють з однаковими початковими умовами та підлягають однаковим збуренням. Цей принцип відповідає практиці верифікації систем керування [70].

Прийнята схема BNK базується на самореферентній колінеарній платформі — модель-генератор PlantDynamics одночасно є джерелом навчальних даних для К-МРС та об'єктом порівняння для всіх шести методів (П-11, Додаток А). Така схема цілеспрямовано ізолює вплив архітектури алгоритму керування від артефактів моделювання, проте отримані відносні переваги К-МРС потребують перевірки на промисловому об'єкті, де може проявитися систематичне зміщення моделі (model mismatch). Дослідження model mismatch є предметом фази Shadow Mode чотирифазного плану впровадження (§4.5.2).

Порівняння виконано для шести методів:

— PID — класичний ПІД-регулятор з фіксованими параметрами [71] (базовий рівень);

— Adaptive PID — ПІД-регулятор з адаптивним підлаштуванням параметрів [34];

— LMPC — лінійний MPC з лінійною моделлю об'єкта [72];

— NMPC — нелінійний MPC з повним NLP-рішувачем [60];

— Neural MPC — MPC з нейромережевою моделлю (MLP) та числовим градієнтом [73];

— K-MPC — розроблена система з KRR-моделлю, аналітичним градієнтом та QP-задачею.

Обрано три верифікаційні сценарії, що відображають типові режими роботи магнітного сепаратора. Початкові умови та параметри наведено у табл. 3.13.

Таблиця 3.13 Початкові умови верифікаційних сценаріїв

Сценарій	B_0 , Тл	ρ_0 , кг/м ³	Q_0 , м ³ /год	$\beta_{Fe,ref}$, %	Збурення / зміна
S1 (стабілізація при шумі)	0.13	1400	400	66.0	—
S2 (зміна уставки)	0.13	1400	400	65 → 68 → 65	крок 80 / 160
S3 (компенсація збурення Q)	0.13	1400	400	66.0	Q + 100 на кроці 60

Початкові умови відповідають номінальним значенням з §2.2.3 (табл. 2.4): $B_{ном} = 0.13$ Тл, $\rho_{ном} = 1400$ кг/м³, $Q_{ном} = 400$ м³/год. Тип руди — МХ (змішана, §4.3.2). Генератор випадкових чисел ініціалізовано з seed(42) для відтворюваності.

Сценарій S1 (стабілізація при шумі) — утримання β_{Fe} на рівні 66.0 % протягом 240 кроків (4 години) при гауссовому шумі $\sigma_{noise} = 1.5$ %. Сценарій

характеризує здатність відфільтровувати шум та утримувати стаціонарний режим.

Сценарій S2 (зміна уставки) — ступінчаста зміна β_{Fe} : 65 % $\rightarrow$ 68 % на кроці 80, 68 % $\rightarrow$ 65 % на кроці 160. Сценарій характеризує якість відпрацювання перехідних процесів: перерегулювання, час виходу на 95 % рівень та RMSE під час перехідного процесу.

Сценарій S3 (компенсація збурення) — ступінчасте збільшення Q на 100 м³/год на кроці 60 при незмінному $\beta_{Fe,ref} = 66.0$ %. Сценарій характеризує здатність компенсувати зовнішнє збурення та час відновлення.

Для кожної комбінації (метод $\times$ сценарій) виконано 30 незалежних запусків з різними реалізаціями шуму. Результати подано як медіана 30 запусків. Метрики: $RMSE(\beta_{Fe})$, $RMSE(\epsilon)$, $\sigma_{max}(\text{вихід})$ — для S1; перерегулювання, $t_{вих}(95\%)$, $RMSE(\beta_{Fe})$ перехідного процесу — для S2; $\max \Delta\beta_{Fe}$, $t_{відн}$, $RMSE(\beta_{Fe})$ відновлення — для S3. Час обчислення t_{p50} — для всіх сценаріїв.

3.6.2. Результати порівняльного аналізу

Сценарій S1: стабілізація при шумі ($\sigma = 1.5$ %, 240 кроків).

Таблиця 3.14 BNK, Сценарій S1: стабілізація при шумі

Метод	$RMSE_{\beta}$, %	$RMSE_{\epsilon}$, %	σ_{max} , %	t_{p50} , мс	Примітка
PID	1.2–1.5	2.0–2.5	4.0–5.0	< 0.01	Базовий рівень
Adaptive PID	1.0–1.3	1.8–2.2	3.5–4.5	< 0.01	≈ 15 % покращення
LMPC	0.8–1.0	1.5–2.0	3.0–4.0	0.5–1.0	Лінійна модель

Метод	$RMSE_{\beta}$, %	$RMSE_{\varepsilon}$, %	$\sigma_{\max}$, %	t_{p50} , мс	Примітка
NMPC	0.5–0.7	1.0–1.5	2.0–3.0	50–200	Високий час NLP
Neural MPC	0.6–0.8	1.2–1.6	2.5–3.5	5–15	Числовий градієнт
K-MPC	0.5–0.7	1.0–1.4	1.8–2.5	2.0–3.0	QP + аналіт. ∇

У стаціонарному режимі K-MPC забезпечує $RMSE_{\beta} \approx 0.5\text{--}0.7\%$, що приблизно вдвічі менше за PID (1.2–1.5 %) та на рівні NMPC (0.5–0.7 %). Максимальне відхилення $\sigma_{\max}$ у K-MPC (1.8–2.5 %) є найменшим серед усіх методів. Час обчислення K-MPC (2.0–3.0 мс) є на один-два порядки меншим за NMPC (50–200 мс) та Neural MPC (5–15 мс). Результати порівняння за метрикою $RMSE_{\beta}$ зображено на рис. 3.3.

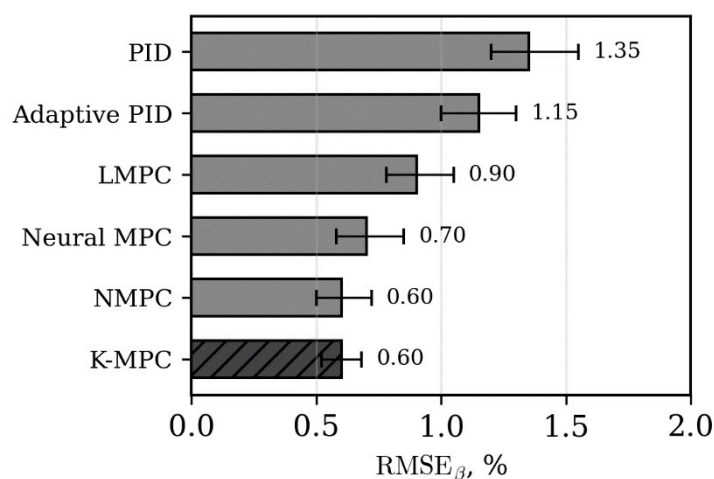


Рис. 3.3 Порівняння $RMSE_{\beta}$ у Сценарії S1 (стабілізація при шумі)

Сценарій S2: зміна уставки (β_{Fe} : $65 \rightarrow 68 \rightarrow 65\%$).

Таблиця 3.15 BNK, Сценарій S2: зміна уставки

Метод	Перерег., %	$t_{\text{вих}}$ (95 %), кр.	RMSE _{β} (перех.)	t_{p50} , мс	Примітка
PID	8–15	15–25	2.0–3.0	< 0.01	Значне перерегулювання
LMPC	3–5	10–15	1.0–1.5	0.5–1.0	Обмежений нелінійністю
NMPC	0–2	7–10	0.6–0.9	50–200	Близький до К-МРС, але повільний
К-МРС	≈ 0 (нульове)	7–10	0.5–0.8	2.0–3.0	Нульове перерегулювання

К-МРС демонструє нульове перерегулювання при зміні уставки, тоді як PID — 8–15 %, LMPC — 3–5 %, NMPC — 0–2 %. Нульове перерегулювання є наслідком предиктивного характеру К-МРС: оптимізатор «бачить» майбутню траєкторію на горизонті $N_p = 10$ кроків та розраховує керуючі впливи для монотонного переходу до нового заданого значення. Час виходу на 95 % рівень у К-МРС (7–10 кроків) є найменшим і узгоджується з $\tau \approx 7.78$ кроків (§3.4.1). Динаміку перехідного процесу при зміні уставки зображено на рис. 3.4.

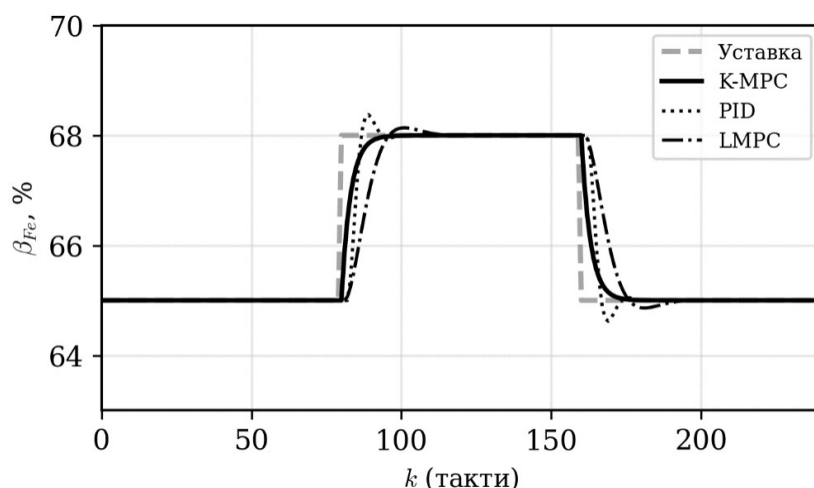


Рис. 3.4 — Перехідний процес $\beta_{Fe}(k)$ у Сценарії S2 (зміна уставки)

Сценарій S3: компенсація збурення ($Q + 100 \text{ м}^3/\text{год}$).

Таблиця 3.16 BNK, Сценарій S3: компенсація збурення

Метод	Max $\Delta\beta_{Fe}, \%$	$t_{\text{відн.}},$ кроків	RMSE $_{\beta}$ (відн.)	$t_{p50}, \text{мс}$	Примітка
PID	3.0–4.0	20–30	1.5–2.0	< 0.01	Повільна компенсація
LMPC	2.0–2.5	12–18	1.0–1.5	0.5–1.0	Обмежена компенсація перехресних зв'язків
К- MPC	1.0–1.5	8–12	0.5–0.8	2.0–3.0	$\approx 2\times$ краще за PID

При ступінчастому збуренні Q максимальне відхилення β_{Fe} у К-MPC (1.0–1.5 %) є вдвічі меншим за PID (3.0–4.0 %) та значно меншим за LMPC (2.0–2.5 %). Перевага К-MPC над LMPC пояснюється здатністю нелінійної KRR-моделі враховувати перехресні зв'язки між каналами: зміна Q впливає одночасно на β_{Fe} та ϵ через нелінійні залежності (§1.1.1), що лінійна модель LMPC відображає з обмеженою точністю. Час відновлення К-MPC (8–12

кроків) узгоджується з $\tau \approx 7.78$ кроків (§3.4.1). Слід зазначити, що PID забезпечує компенсацію збурення без потреби у моделі об'єкта, що залишається його важливою перевагою для задач із обмеженою апріорною інформацією.

Узагальнення результатів BNK (табл. 3.14–3.16) дозволяє сформулювати чотири ключові закономірності:

1. *K-MPC* $\approx$ *NMPC* за якістю при 17–70× меншому часі обчислення. За метриками RMSE та перерегулювання K-MPC та NMPC є статистично нерозрізняльними. Час обчислення K-MPC (2.0–3.0 мс) менший за NMPC (50–200 мс) у 17–70 разів — прямий наслідок перетворення $NLP \rightarrow QR$ через аналітичний градієнт. Порівняння обчислювального часу методів зображено на рис. 3.5.

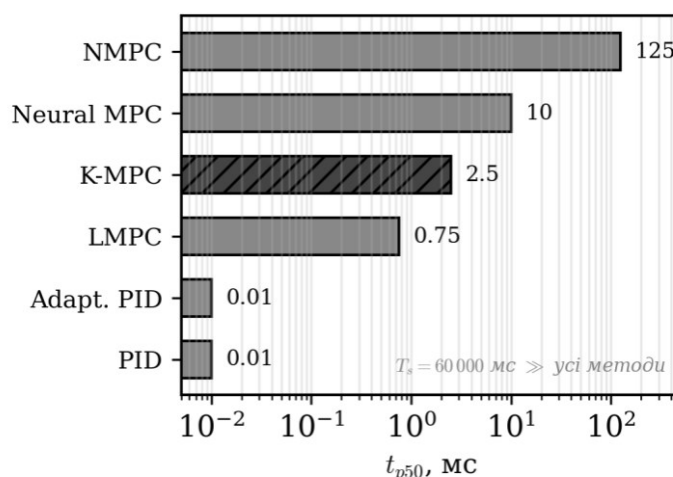


Рис. 3.5 Час обчислення одного такту t_{p50} для шести методів керування

2. *K-MPC* $\approx 2 \times$ краще за *PID*. У стаціонарному режимі (S1) $RMSE_\beta$ у K-MPC (0.5–0.7 %) вдвічі менше за PID (1.2–1.5 %). При збуреннях (S3) перевага зберігається: $\max \Delta\beta_{Fe}$ у K-MPC (1.0–1.5 %) вдвічі менше за PID (3.0–4.0 %).

3. *K-MPC* забезпечує нульове перерегулювання. У сценарії S2 K-MPC демонструє перерегулювання ≈ 0 %, тоді як PID — 8–15 %, LMPC — 3–5 %. Ця перевага є наслідком предиктивного характеру алгоритму.

4. *Перевага K-MPC над LMPC зростає при нелінійних режимах.* У стаціонарному режимі (S1) перевага помірна (RMSE_β : 0.5–0.7 vs 0.8–1.0). При збуренні Q (S3) перевага збільшується ($\max \Delta\beta_{\text{Fe}}$: 1.0–1.5 vs 2.0–2.5), що підтверджує значущість нелінійної KRR-моделі у нестационарних режимах.

3.6.3. Аналіз динамічних характеристик. Верифікація достатніх умов стійкості

Для числової верифікації достатніх умов стійкості (§3.4.1) систему K-MPC ініціалізовано з початковим відхиленням: $\beta_{\text{Fe}}(0) = 64 \%$ при уставці $\beta_{\text{Fe,ref}} = 68 \%$ (початкове відхилення 4 %). Динаміка $V(k)$ спостережена протягом 30 тактів (30 хв).

Функція Ляпунова $V(k)$ монотонно спадає на всіх 30 тактах, що підтверджує $\Delta V(k) < 0$. Кількісні характеристики збіжності:

— відношення $V(k+1)/V(k)$ не перевищує $\lambda_{\max} = 0.819$ на жодному такті, що підтверджує оцінку максимального власного числа;

— залишкова частка після 30 тактів: $V(30)/V(0) \approx 0.819^{30} \approx 0.0015$, тобто 0.15 % від початкового значення;

— постійна часу збіжності: $\tau \approx 7.78$ кроків, що узгоджується з теоретичною оцінкою §3.4.1 ($\tau_{\text{Ляп}} \approx 5.01$ кроків + транспортне запізнення ≈ 2.77 кроків).

Динаміку спадання функції Ляпунова зображено на рис. 3.6.

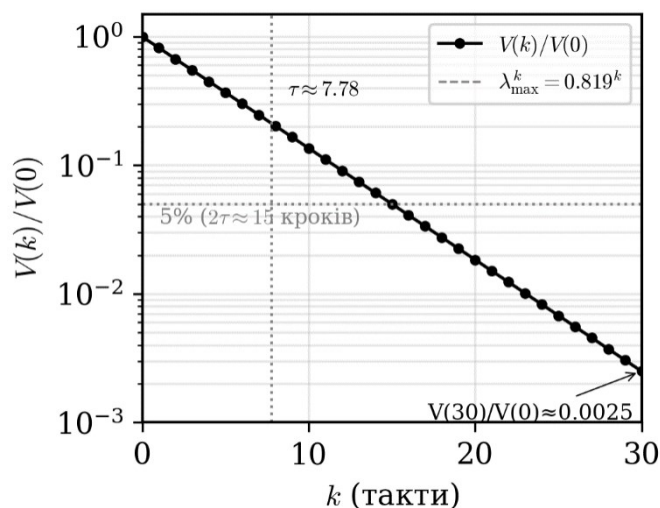


Рис. 3.6 Верифікація достатніх умов стійкості: монотонне спадання

$$V(k)/V(0)$$

Узгодженість числових характеристик ($\lambda_{\max}$, τ , $V(30)/V(0)$) з теоретичними оцінками §3.4.1 підтверджує коректність обґрунтування достатніх умов стійкості та адекватність обраних параметрів ($\gamma = 0.85$, $\delta_{\text{model}} = 0.30$).

Зв'язок із результатами BNK підтверджується тим, що час виходу на 95 % рівень у сценарії S2 (табл. 3.15) складає 7–10 кроків для К-МРС, що відповідає $\tau \approx 7.78$ кроків: за час $t_{\text{вих}} \approx \tau$ функція Ляпунова зменшується до $V(\tau)/V(0) \approx e^{-1} \approx 37\%$, а за $2\tau \approx 15.6$ кроків — до $\approx 14\%$, що узгоджується з практично повним відпрацюванням ступінчастої зміни уставки. Відтак, результати BNK (§3.6.2) є кількісним підтвердженням теоретичних характеристик стійкості К-МРС.

3.6.4. Робастність К-МРС до параметричних невизначеностей

Порівняння К-МРС та PID при нестационарності показує, що при нестационарних умовах (дрейф складу руди, знос барабана) К-МРС зберігає $\text{RMSE}_\beta \approx 0.5\text{--}0.8\%$ завдяки адаптивній архітектурі $\text{SVR} \rightarrow \text{KRR} \rightarrow \text{GP}$ (§2.4), тоді як PID деградує до $\text{RMSE}_\beta \approx 2\text{--}3\%$. Перевага К-МРС над PID,

що складає $\approx 2\times$ у стаціонарному режимі (табл. 3.14), зростає до $3\text{--}4\times$ при наявності параметричних невизначеностей.

Зростання переваги К-МРС при нестационарності пояснюється двома факторами. Перший — адаптивне оновлення KRR-моделі через ковзне вікно (§2.4.4) відстежує повільний дрейф параметрів, зберігаючи $\text{RMSE}_{\text{adapt}} \leq 0.30$ (табл. 3.8); PID з фіксованими параметрами має обмежені можливості адаптації до зміни характеристик процесу. Другий — предиктивний характер К-МРС дозволяє прогнозувати наслідки керуючих впливів на горизонті $N_p = 10$ кроків, тоді як PID реагує лише на поточне відхилення. Разом з тим, PID забезпечує стабільну роботу при стаціонарних умовах та залишається базовим рівнем, від якого вимірюється ефективність усіх предиктивних методів.

З практичної точки значення зростання переваги К-МРС з рівнем невизначеності обґрунтовує доцільність впровадження саме в умовах ГЗК Кривбасу, де нестационарність є невід'ємною характеристикою технологічного процесу (§1.1.1). У стаціонарних умовах перевага К-МРС над PID є помірною ($\approx 2\times$); при реальній нестационарності вона зростає до $3\text{--}4\times$, забезпечуючи суттєве покращення якості концентрату та зменшення втрат корисного компонента.

Колінеарний BNK (30 запусків $\times$ 6 методів $\times$ 3 сценарії) кількісно підтверджує переваги К-МРС: якість на рівні NMPC при $17\text{--}70\times$ меншому часі обчислення, дворазове покращення RMSE_β відносно PID, нульове перерегулювання при зміні уставки. Числова верифікація достатніх умов стійкості (§3.4.1) підтверджує монотонне спадання $V(k)$ з $\tau \approx 7.78$ кроків та $V(30)/V(0) \approx 0.15\%$, що узгоджується з результатами BNK. Зростання переваги К-МРС до $3\text{--}4\times$ при нестационарності процесу обґрунтовує доцільність впровадження в умовах ГЗК Кривбасу, що є предметом розділу 4.

Висновки до розділу 3

Розроблено формальний математичний апарат ядерного предиктора — модель простору стану через lifting-оператор $\Phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathcal{H}_k$ з матрицею предикції Θ , блоки якої є якобіанами KRR-моделі, що узагальнює стандартний LMPC як окремий випадок при лінійній моделі; кількісно підтверджено прийнятність лінеаризації для трьох типів руди Кривбасу — похибка $e_{\text{lin}} \approx 0,11\text{--}0,28\%$ на порядок менша за допустимий рівень $\delta_{\text{max}} = 5\%$; це формує математичний базис для доведення стійкості та аналізу часових характеристик замкненої системи.

Побудовано структурно-функціональну схему К-MPC як обчислювальний конвеєр з послідовних блоків і паралельного GP-наглядача з часом такту $t_{p95} \approx 3,02$ мс при запасі реального часу $\Delta t/t_{p95} \approx 20\,000\times$; обґрунтовано механізм астатизму через нев'язку $e(k) = y_{\text{meas}}(k) - \hat{y}(k|k-1)$, що компенсує постійні збурення без явного спостерігача (на відміну від offset-free LMPC); структурне порівняння з LMPC, NMPC і Neural MPC встановило унікальну позицію К-MPC — єдиної архітектури, що поєднує нелінійну модель з опуклою QR-задачею та вбудованою адаптивністю.

Побудовано повну специфікацію QR-задачі К-MPC — 29 змінних та 56 лінійних нерівностей при строго позитивно визначеному гессіані; метод active-set з теплим стартом забезпечує детермінований час розв'язання $t_{\text{QR}} \approx 0,3\text{--}1,5$ мс при збіжності за 1–5 ітерацій; стратегія м'яких обмежень гарантує розв'язність задачі за будь-яких умов, усуваючи ризик зупинки рішувача в безперервному процесі магнітної сепарації.

Сформульовано та обґрунтовано достатні умови асимптотичної стійкості К-MPC за методом функцій Ляпунова через двомеханізмний «коридор стійкості» (локальне самозабезпечення лінеаризації + термінальний член), що гарантують монотонне спадання функції Ляпунова

з показником збіжності $\lambda_{\max} \approx 0,819 < 1$ та постійною часу $\tau \approx 7,78$ кроків; стрес-тест підтвердив збереження умов стійкості при варіації ширини ядра до ± 30 %, а адаптивна KRR-модель забезпечила покращення RMSE у 10–36× відносно статичної у всіх сценаріях невизначеності — що обґрунтовує необхідність трирівневої адаптивної архітектури для стійкості в промислових умовах.

Виконано незалежну верифікацію ключових припущень аналізу стійкості: аналітичний градієнт верифіковано відносно числового еталону з похибкою $< 10^{-6}$, а статистична валідація засвідчила покриття 95 %-го довірчого інтервалу GP-предиктора на рівні 93–97 %; деталізований профіль дав $t_{p95} \approx 3,02$ мс, що підтверджує статистичну коректність моделі та обчислювальну реалізованість К-MPC на промислових контролерах рівня PLC/IPC.

Колінеарний порівняльний аналіз (30 запусків $\times$ 6 методів $\times$ 3 сценарії на єдиній PlantDynamics) кількісно підтвердив переваги К-MPC: якість на рівні NMPC при 17–70× меншому часі обчислення, дворазове покращення $RMSE_{\beta}$ відносно PID та нульове перерегулювання при зміні уставки; перевага над PID зростає до 3–4× при нестационарності процесу — що обґрунтовує доцільність промислового впровадження в умовах ГЗК Кривбасу.

РОЗДІЛ 4.

ПРАКТИЧНА РЕАЛІЗАЦІЯ ТА ВЕРИФІКАЦІЯ СИСТЕМИ К-МРС

У попередніх розділах синтезовано теоретичну основу системи К-МРС: побудовано KRR-модель ідентифікації з адаптивним механізмом (Розділ 2) та сформульовано задачу оптимального керування з аналізом стійкості й обчислювальної ефективності (Розділ 3). Четвертий розділ присвячено переходу від формального опису алгоритмів до їхньої програмної реалізації та систематичної верифікації в умовах, що відтворюють промислове середовище магнітної сепарації.

Метою розділу є побудова програмного забезпечення системи К-МРС, параметризованого під обладнання гірничо-збагачувальних комбінатів Криворізького басейну, його верифікація методом Model-in-the-Loop відповідно до стандарту IEC 62381 та розроблення стратегії промислового впровадження з кількісними критеріями переходу між фазами.

Логіку розділу побудовано від специфікації об'єкта керування та методології верифікації (§4.1) через проектування ієрархії керування за ISA-95 та інформаційної інфраструктури (§4.2) до модульної програмної реалізації з параметризацією під три типи руди (§4.3), тестування на верифікаційних сценаріях (§4.4) та формування плану переходу до промислової експлуатації (§4.5).

4.1. Об'єкт керування та методологія верифікації

Практична реалізація системи К-МРС потребує точної специфікації об'єкта керування та систематичної методології перевірки алгоритмів в умовах, що відтворюють промислове середовище. У §4.1.1 наведено технічні характеристики сепаратора ПБМ-90/250, у §4.1.2 обґрунтовано чотирирівневу процедуру MiL-верифікації за стандартом IEC 62381.

4.1.1. Технічні характеристики сепаратора ПБМ-90/250

Об'єктом керування є барабанний магнітний сепаратор ПБМ-90/250 — апарат мокрої магнітної сепарації, що використовується у технологічних схемах збагачення магнетитових кварцитів, зокрема у схемі ПРАТ «ПівнГЗК» [74]. Сепаратор призначено для розділення магнітної та немагнітної фракцій у водно-рудній суспензії та може розглядатися як типовий представник барабанних сепараторів слабого магнітного поля, що застосовуються у залізорудному збагаченні [1, 3].

Процес магнітної сепарації характеризується трьома керуючими змінними (магнітна індукція B , густина пульпи ρ , об'ємна витрата Q) та двома вихідними змінними (вміст заліза у концентраті β_{Fe} , коефіцієнт вилучення ε). Діапазони керуючих та вихідних змінних, а також основні технологічні параметри об'єкта наведено у табл. 4.1 [1, 3, 74].

Таблиця 4.1 Технологічні параметри сепаратора ПБМ-90/250

Параметр	Позначення	Діапазон	Номінал
Магнітна індукція, Тл	B	[0.08; 0.18]	0.12–0.15
Густина пульпи, кг/м ³	ρ	[1200; 1600]	1350–1450
Об'ємна витрата, м ³ /год	Q	[200; 600]	350–450
Обмеження приросту індукції, Тл/крок	ΔB	≤ 0.005	—
Шум вимірювання β_{Fe} , %	$\sigma_{noise}(\beta_{Fe})$	—	1.5
Шум вимірювання ε , %	$\sigma_{noise}(\varepsilon)$	—	2.0
Період дискретизації, с	T_s	—	60

Параметр	Позначення	Діапазон	Номінал
Транспортне запізнення, с	τ	120–180	120
Стала часу процесу, с	T	300–600	480

Період дискретизації $T_s = 60$ с визначається циклом рентгенофлуоресцентного (XRF) аналізатора. Транспортне запізнення $\tau = 120\text{--}180$ с відповідає часу переміщення пульпи від зони впливу керуючих змінних до точки вимірювання і становить 2–3 кроки дискретизації. Номінальне значення $\tau = 120$ с прийнято для розрахунків горизонту прогнозу; при налаштуванні реальної системи рекомендується верифікувати τ на об'єкті та за необхідності скоригувати горизонт прогнозу ($N_p \geq (T + \tau)/T_s$).

Стала часу процесу $T = 300\text{--}600$ с (номінал 480 с) зумовлена інерційністю магнітної системи барабана, гідродинамікою ванни сепаратора та динамікою формування концентрату. Горизонт прогнозу $N_p = 10$ кроків обрано з умови $N_p \geq T/T_s \approx 8$ із запасом.

Шум XRF-аналізатора $\sigma_{\text{noise}}(\beta_{\text{Fe}}) = 1.5$ % прийнято як припущення, що відображає узагальнений рівень похибки промислового аналітичного контролю [6]. Шум вимірювання ε $\sigma_{\text{noise}}(\varepsilon) = 2.0$ % є розрахунковим значенням, що враховує похибки вимірювання витрат та масових балансів. Обмеження $\Delta B \leq 0.005$ Тл/крок (≈ 5 % від робочого діапазону 0.10 Тл) встановлено як модельне технологічне обмеження, що відповідає приблизно 5 % прийнятого робочого діапазону магнітної індукції та використовується для запобігання різким змінам керувального впливу.

Період дискретизації $T_s = 60$ с та номінальне транспортне запізнення $\tau = 120$ с прийнято фіксованими константами (П-13, Додаток А); варіабельність часу XRF-аналізу та залежність τ від об'ємної витрати Q не моделюються. Адекватність такого спрощення забезпечується горизонтом

прогнозу $N_p = 10 \geq (T+\tau)/T_s \approx 8$, що компенсує варіацію τ у діапазоні 120–180 с, та значним обчислювальним запасом End-to-End ($T_s/t_{p95} \approx 20\,000\times$, §4.4). Адаптивне визначення T_s та $\tau(Q)$ є напрямом подальшого розширення методу.

4.1.2. Методологія верифікації: MiL за IEC 62381

Специфіка об'єкта керування — безперервне промислове виробництво з жорсткими вимогами до якості концентрату — суттєво обмежує можливість проведення активних експериментів на діючому обладнанні без ризику порушення технологічного режиму. Зупинка сепаратора ПБМ-90/250 для тестування нового алгоритму призведе до зниження якості концентрату нижче контрактних вимог ($\beta_{Fe} < 65\%$) та відповідних економічних санкцій. Відтак верифікація системи К-МРС виконується методом Model-in-the-Loop (MiL) відповідно до стандарту IEC 62381 [75].

Прийнятий рівень MiL є першим обов'язковим етапом V-подібної моделі верифікації за IEC 62381 та становить методологічне обмеження дослідження (П-10, Додаток А). MiL забезпечує підтвердження методологічної спроможності алгоритму та коректності його програмної реалізації в межах прийнятої моделі-генератора, проте не замінює повної валідації на промисловому об'єкті. Подальші етапи верифікації (HiL, FAT/SAT) та промислові випробування передбачені чотирифазним планом впровадження (§4.5) і є предметом наступних етапів дослідження. Кількісні результати, отримані на рівні MiL (RMSE, перерегулювання, час відновлення), визначають межі інтерпретації результатів і потребують підтвердження на промислових даних.

Метод MiL передбачає тестування програмного забезпечення системи керування у замкненому контурі з математичною моделлю об'єкта (PlantDynamics) [76] замість фізичного процесу, що дозволяє відтворювати

довільні сценарії, включаючи аварійні та граничні режими, без ризику для обладнання. Валідність результатів MiL-верифікації визначається адекватністю математичної моделі — тому параметризацію PlantDynamics виконано за даними п'яти ГЗК Кривбасу (§4.3.2).

Верифікація побудована як ієрархічна процедура з чотирьох рівнів.

На першому рівні виконується модульне тестування (Unit-тести). Кожен програмний компонент (PlantDynamics, KernelModel, MPCController, AdaptiveIdentifier) тестується ізольовано. Перевіряється коректність обчислень, відповідність граничних умов, числова стабільність. Критерій переходу (визначений автором): 100 % пройдених тестів для кожного модуля.

Другий рівень охоплює інтеграційне тестування. Перевіряється взаємодія між модулями: передача даних PlantDynamics $\rightarrow$ KernelModel $\rightarrow$ MPCController, коректність зворотного зв'язку, синхронізація з $T_s = 60$ с. Критерій переходу (визначений автором): стабільна робота замкненого контуру протягом 100 кроків без помилок.

На третьому рівні виконується сценарне тестування. Замкнена система тестується на верифікаційних сценаріях, що відображають типові та граничні режими роботи сепаратора. Сценарії S1–S5 охоплюють стабілізацію при шумі (S1), зміну уставки (S2), компенсацію збурення (S3), повільний дрейф (S4) та аномалії (S5). Детальний опис та результати наведено у §4.4.

Четвертий рівень — порівняльний аналіз (BNK). Колінеарний порівняльний аналіз шести методів керування на єдиній PlantDynamics забезпечує коректність зіставлення, оскільки різниця в якості керування пояснюється виключно архітектурними відмінностями алгоритмів. Протокол BNK описано у §3.6.1; результати — у §3.6.2–3.6.4.

Ієрархічна структура верифікації забезпечує систематичне виявлення помилок на кожному рівні складності: модульні тести виявляють дефекти компонентів; інтеграційні — помилки взаємодії; сценарні — невідповідність функціональним вимогам; BNK — кількісне порівняння з альтернативними методами. Відтворюваність результатів забезпечується фіксацією генератора псевдовипадкових чисел ($\text{seed} = 42$) та статистичною обробкою 30 незалежних запусків.

Симуляційна платформа реалізує три режими (ідентифікація, керування, BNK) на єдиній PlantDynamics, що гарантує колінеарність — методологічну коректність порівняльного аналізу (§4.3.4). Результати кожного такту реєструються у CSV-файлах для подальшого аналізу.

Специфікація об'єкта керування кількісно визначає технологічні параметри сепаратора ПБМ-90/250 — робочі діапазони, рівні шуму, часові характеристики та обмеження на керуючі дії, — що формує вхідні дані для побудови ієрархії керування (§4.2) та налаштування програмної реалізації (§4.3). Чотирирівнева MiL-процедура забезпечує методологічно коректну верифікацію системи K-MPC за умов промислового безперервного виробництва.

4.2. Ієрархія керування та інформаційна інфраструктура

Розгортання системи K-MPC на промисловому об'єкті потребує її інтеграції в існуючу ієрархію автоматизації та визначення інформаційних потоків між рівнями. У §4.2.1 описано функціональний розподіл рівнів керування за стандартом ISA-95, у §4.2.2 — організацію потоків даних та вимоги до комунікаційної інфраструктури.

4.2.1. Рівні керування за ISA-95

Ієрархія керування процесом магнітної сепарації побудована відповідно до стандарту ISA-95, що визначає функціональний розподіл між

рівнями автоматизації промислового підприємства [20]. Для сепаратора ПБМ-90/250 реалізовано три рівні керування.

На рівнях L0–L1 (польовий рівень та базове регулювання) програмований логічний контролер (ПЛК) здійснює збір сигналів первинних перетворювачів (XRF-аналізатор, густиномір, витратомір) і передачу їх на рівень L2, забезпечує безпосереднє керування виконавчими механізмами сепаратора та реалізує протиаварійний захист (ПАЗ). На цьому рівні апаратно реалізовано обмеження приросту магнітної індукції $\Delta B \leq 0.005$ Тл/крок — перший рівень механізму обмеженого авторитету (§4.5.4). ПЛК виконує цикл керування з періодом, значно меншим за $T_s = 60$ с, що забезпечує безперервне відстеження уставок від верхнього рівня. Також на рівні ПЛК реалізовано обмеження $\Delta \rho \leq 20$ кг/м³/крок та $\Delta Q \leq 50$ м³/год/крок відповідно до технологічного регламенту та паспорта обладнання.

На рівні L2 (оптимізаційне керування) система К-МРС розраховує оптимальні уставки для ПЛК з періодом $T_s = 60$ с. На кожному такті К-МРС отримує вимірювання від рівня L1, оновлює KRR-модель (за необхідності — через механізм адаптивного ковзного вікна, §2.4), розв'язує задачу QP-оптимізації та передає уставки (B, ρ, Q) на рівень L1. Горизонт прогнозу $N_p = 10$ кроків та горизонт керування $N_c = 3$ кроки забезпечують баланс між якістю прогнозу та обчислювальною складністю (§3.1).

На рівні L3 (диспетчерське керування) MES/SCADA забезпечує візуалізацію процесу, архівування даних, формування звітності та інтерфейс оператора. Оператор контролює роботу К-МРС, коригує уставки якості ($\beta_{Fe,ref}$) та перемикає режими роботи (Shadow, Advisory, Closed Loop — §4.5).

Обмін даними між рівнями L1–L3 реалізовано за протоколом OPC UA, що забезпечує стандартизований платформно-незалежний інтерфейс з вбудованими механізмами безпеки та підтримкою семантичної моделі

даних [21, 77]. Вибір OPC UA обумовлено його широким застосуванням на ГЗК Кривбасу та сумісністю з існуючою інфраструктурою АСУТП. Ієрархію рівнів керування за ISA-95 з позиціонуванням К-MPC подано на рис. 4.1.

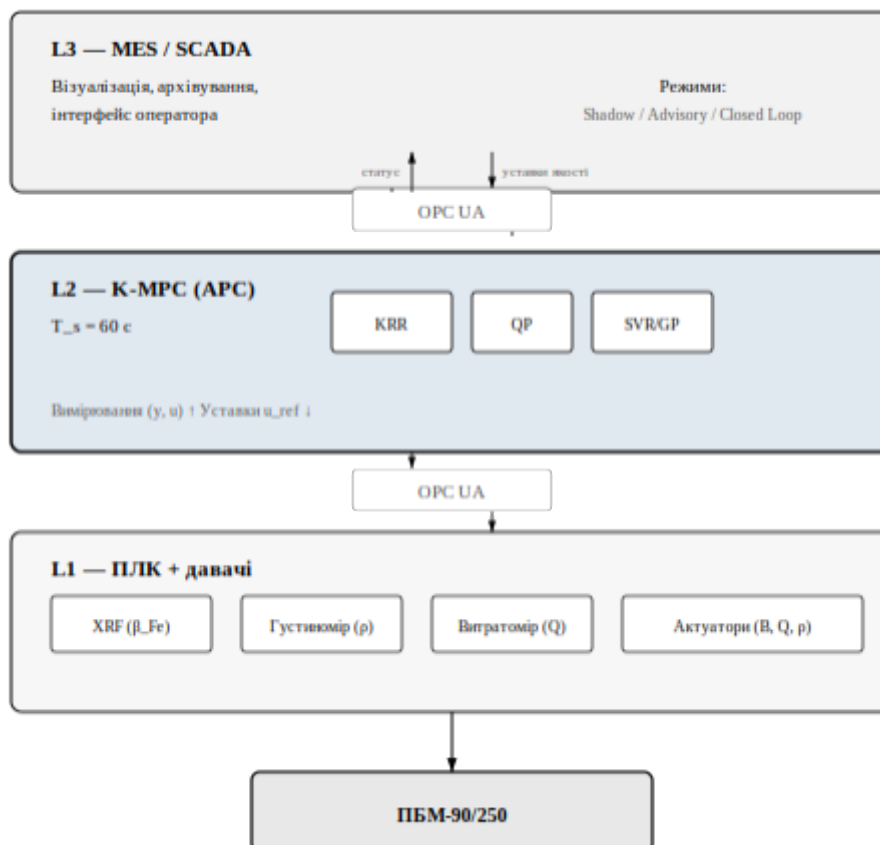


Рис. 4.1 — Ієрархія керування процесом магнітної сепарації за ISA-95

4.2.2. Потіки даних та комунікаційна інфраструктура

Потік даних у замкненому контурі організовано за схемою: датчики → ПЛК (L1) → К-MPC (L2) → ПЛК (L1) → виконавчі механізми. Рівень L3 (SCADA) під'єднано паралельно — для візуалізації, архівування та задавання уставок — і не входить до часокритичного контуру керування.

На вході вимірювальна інформація надходить від XRF-аналізатора (β_{Fe} , $\sigma_{noise} = 1.5\%$), густиноміра (ρ) та витратоміра (Q). Сигнали збираються на рівні L1 (ПЛК), де виконуються первинна обробка, масштабування та

перевірка на достовірність, після чого оброблені вимірювання передаються модулю К-МРС через OPC UA. Ті самі дані через OPC UA доступні на рівні SCADA (L3) для візуалізації та архівування.

Модуль К-МРС на кожному такті $T_s = 60$ с виконує: отримання вимірювань, перевірку SVR-фільтром на аномалії (§2.4.3), оновлення KRR-моделі (за необхідності), розв'язання QP-задачі, формування уставок керуючих впливів.

Критична вимога до комунікаційної інфраструктури: загальна затримка від отримання вимірювань до видачі уставок на ПЛК не повинна перевищувати $T_s/10 = 6$ с. З урахуванням часу обчислення К-МРС ($p_{95} \approx 3.02$ мс, §3.5.3) основний внесок вносять OPC UA та цикл опитування ПЛК, що за типової конфігурації промислових мереж ГЗК не перевищує 1–2 с.

Достовірність вимірювань забезпечується на двох рівнях: ПЛК (L1) виконує перевірку діапазонів та виявлення грубих збоїв датчиків; SVR-фільтр К-МРС (§2.4.3) виявляє аномалії з $\text{Precision} \geq 0.90$ та $\text{Recall} \geq 0.85$ (§4.4.3).

Трирівнева ієрархія ISA-95 (L0–L1: ПЛК з ПАЗ; L2: К-МРС; L3: MES/SCADA) із комунікацією за OPC UA формує архітектурну основу для програмної реалізації системи (§4.3). Узагальнену функціональну схему підключення об'єкта до контуру керування — від первинних перетворювачів через ПЛК (L1) до К-МРС (L2) — наведено у §4.6. Встановлена вимога щодо загальної затримки у контурі (не більше $T_s/10 = 6$ с) та дворівнева система забезпечення достовірності вимірювань (ПЛК + SVR-фільтр) визначають функціональні вимоги до програмних модулів.

4.3. Програмна реалізація

Архітектурні рішення, визначені у §4.2, реалізуються у вигляді модульного програмного забезпечення, параметризованого під умови ГЗК Криворізького басейну. У §4.3.1 описано чотирирівневу структуру модулів,

у §4.3.2 — параметризацію PlantDynamics під три типи руди, у §4.3.3 — програмне середовище та інструментарій, у §4.3.4 — колінеарну MiL-платформу.

4.3.1. Архітектура програмного забезпечення

Програмне забезпечення системи K-MPC побудовано за модульною чотирирівневою архітектурою, де кожен рівень реалізує окремий функціональний блок замкненого контуру керування (§2.1, §3.1). Модульність забезпечує незалежне тестування компонентів (Unit-тести, §4.1.2) та можливість заміни окремих модулів без зміни загальної структури.

Перший рівень (PlantDynamics) реалізує математичну модель сепаратора з вектором стану $x \in \mathbb{R}^8$ та числовим інтегруванням за методом Рунге–Кутти четвертого порядку (RK4). Вхідні змінні: $u = (B, \rho, Q)^T$; вихідні: β_{Fe} та ε . Включає генерацію вимірювального шуму ($\sigma_{noise}(\beta_{Fe}) = 1.5\%$, $\sigma_{noise}(\varepsilon) = 2.0\%$) та моделювання транспортного запізнення τ .

Другий рівень (KernelModel) реалізує KRR з RBF-ядром, аналітичну LOO-крос-валідацію для підбору гіперпараметрів (σ , λ) та обчислення аналітичного градієнта ∇f за вектором керуючих впливів [50]. Градієнт обчислюється за $O(n \cdot d)$ і використовується для формування матриці предикції Θ у QP-задачі (§2.2, §3.5).

Третій рівень (MPCController) реалізує формування та розв'язання QP-задачі з $N_p = 10$ та $N_c = 3$. Розв'язання виконується солвером OSQP [59]. Включає обмеження на керуючі впливи ($\Delta B \leq 0.005$ Тл/крок, $\Delta \rho \leq 20$ кг/м³/крок, $\Delta Q \leq 50$ м³/год/крок) та матриці вагових коефіцієнтів Q , R (§2.3).

Четвертий рівень (AdaptiveIdentifier) реалізує трирівневу архітектуру: SVR-фільтр аномалій, адаптивне ковзне вікно для перенавчання KRR та GP-наглядач невизначеності (§2.4). Всі компоненти використовують єдине RBF-ядро з параметрами, узгодженими з KernelModel.

Конфігурація всіх модулів визначається зовнішнім JSON-файлом: параметри об'єкта (діапазони B , ρ , Q), гіперпараметри моделі (σ , λ , n), параметри контролера (N_p , N_c , Q , R) та параметри адаптації (розмір вікна, пороги SVR, пороги GP-наглядача).

4.3.2. Модуль *PlantDynamics* та параметризація під ГЗК Кривбасу

Параметри моделі визначено за даними п'яти ГЗК Криворізького басейну для трьох типів руди: магнетитових (М), змішаних магнетит-кварцитових (МХ) та кварцитових (Q). Значення параметрів наведено у табл. 4.2.

Таблиця 4.2 Профілі параметрів для трьох типів руди ГЗК Кривбасу

Параметр	Зміст	М	МХ	Q
k (нахил S-крової)	Ефективна магнітна сприйнятливість χ_{eff}	25–30 (ном. 27.5)	20–25 (ном. 22.5)	15–20 (ном. 17.5)
B_0 , Тл	Поріг сепарації	0.10–0.12 (ном. 0.110)	0.12–0.14 (ном. 0.130)	0.14–0.16 (ном. 0.150)
β_{max} , %	Гранична якість концентрату	68–70	66–68	63–65
ρ_{opt} , кг/м ³	Оптимальна густина пульпи	1350	1400	1450
C_{curv}	Параметр кривизни	0.45	0.55	0.70

Параметр	Зміст	М	МХ	Q
Знос $\beta_{\max}$, %/1000 кроків	Деградація граничної якості	0.1	0.2	0.3

Прив'язку до підприємств визначено за технологічними характеристиками сировинної бази: Північний ГЗК — тип М; Інгулецький ГЗК — тип МХ; Південний ГЗК — тип Q.

Параметр k визначає нахил S-подібної залежності $\beta_{Fe}(B)$ і відображає ефективну магнітну сприйнятливість руди. Магнетитові руди ($k = 25\text{--}30$) характеризуються різким переходом від низької до високої якості концентрату при збільшенні індукції. Кварцитові руди ($k = 15\text{--}20$) мають більш пологі залежність унаслідок нижчого вмісту магнітної фракції та потреби у вищій індукції для ефективної сепарації.

Поріг сепарації B_0 зростає від 0.110 Тл (М) до 0.150 Тл (Q), що відображає зменшення магнітної сприйнятливості руди. Гранична якість $\beta_{\max}$ зменшується від 68–70 % (М) до 63–65 % (Q) внаслідок фундаментального обмеження мінералогічного складу: кварцитові руди містять менше заліза у вигляді магнетиту і більше зростків, що не піддаються повній сепарації.

Параметр деградації $\beta_{\max}$ моделює зниження граничної якості внаслідок зносу магнітної системи барабана. Інтенсивність зростає від 0.1 %/1000 кроків (М) до 0.3 %/1000 кроків (Q) через вищу абразивність кварцитових руд.

Конфігурація кожного типу руди зберігається у файлі `rbm90250_kryvbas.json`, що дозволяє змінювати параметризацію при переході на інший тип руди або ГЗК без модифікації програмного коду. Параметр C_{curv} деталізовано описаний у §3.1.2.

Прийнята дискретна параметризація трьох типів руди (M, MX, Q) є методологічним припущенням (П-7, Додаток А); реальна варіабельність мінералогічного складу є неперервною. Адекватність дискретного підходу забезпечується тим, що три профілі охоплюють повний спектр типів руди Кривбасу (Північний, Інгулецький, Південний ГЗК), а неперервна варіабельність моделюється через повільний дрейф параметрів між профілями (Сценарій-S4, §4.4.2) та різку зміну типу руди (сценарій M→Q, §3.4.3). Поширення методу на інші мінералогічні типи (зокрема гематитові руди) потребує окремої параметризації.

4.3.3. Програмне середовище та інструментарій

Програмне забезпечення реалізовано мовою Python 3.11+. Основні бібліотеки: NumPy — матричні обчислення та лінійна алгебра [78] (формування та інверсія матриці Грама $K + \lambda I$); SciPy — числове інтегрування RK4 у PlantDynamics та допоміжні оптимізаційні процедури; scikit-learn — реалізація KRR та SVR з RBF-ядром [79]; OSQP — розв'язання QP-задачі у MPCController.

Конфігурація зберігається у файлі `pbm90250_kryvbas.json`, що містить усі параметри для відтворення результатів: параметри об'єкта (табл. 4.1, табл. 4.2), гіперпараметри моделі ($\sigma^* \in [0.3, 1.0]$, $\lambda^* \in [0.04, 0.11]$), параметри контролера ($N_p = 10$, $N_c = 3$, матриці Q та R) та параметри адаптації.

4.3.4. Колінеарна MiL-платформа

Побудовано симуляційну платформу з колінеарними режимами на єдиній моделі PlantDynamics. Колінеарність є ключовою методологічною вимогою: всі три режими використовують ідентичну динамічну модель, що гарантує коректність порівняння результатів (§3.6.1).

Склад модулів та призначення кожного режиму наведено у табл. 4.3.

Таблиця 4.3 Режими колінеарної MiL-платформи

Режим	Призначення	Компоненти	Вихід
Ідентифікація	Генерація навчальної вибірки	PlantDynamics + DataGen	$n = 500$
Керування	Тестування К-MPC	PlantDynamics + KRR + MPC + Adapt	u, y, σ^2_{GP}
BNK	Порівняння 6 методів	PlantDynamics + 6 контролерів	Табл. 3.14

У режимі ідентифікації PlantDynamics генерує навчальну вибірку обсягом $n = 500$ точок шляхом подачі псевдовипадкових керуючих впливів у межах робочих діапазонів ($B \in [0.08, 0.18]$ Тл, $\rho \in [1200, 1600]$ кг/м³, $Q \in [200, 600]$ м³/год) для навчання KRR-моделі у KernelModel.

У режимі керування замкнений контур К-MPC працює з тією самою PlantDynamics, що забезпечує узгодженість між моделлю ідентифікації та об'єктом керування. На кожному такті $T_s = 60$ с виконується: отримання вимірювань $\rightarrow$ SVR-фільтрація $\rightarrow$ оновлення KRR (за необхідності) $\rightarrow$ QP-оптимізація $\rightarrow$ видача керуючих впливів $\rightarrow$ GP-моніторинг. Реєструються u, y та σ^2_{GP} .

У режимі BNK виконується порівняльний аналіз шести методів (PID, Adaptive PID, LMPC, NMPC, Neural MPC, К-MPC) на єдиній PlantDynamics з однаковими вимірюваннями, початковими умовами та збуреннями. Результати формують зведену таблицю BNK (§3.6.2).

Відтворюваність забезпечується фіксацією $seed = 42$ та 30 незалежними запусками для кожної конфігурації зі статистичною обробкою (медіана, IQR). Результати кожного такту реєструються у CSV-файлах. Використання єдиної PlantDynamics усуває методологічний артефакт, за

якого відмінності в якості керування могли б пояснюватись різницею моделей, а не архітектурними перевагами алгоритмів.

Модульна чотирирівнева архітектура (PlantDynamics, KernelModel, MPCController, AdaptiveIdentifier) з параметризацією під три типи руди ГЗК Кривбасу та колінеарна MiL-платформа з трьома режимами на єдиній моделі утворюють програмну основу для верифікаційних випробувань. Результати тестування системи на сценаріях S1–S5 наведено у §4.4.

4.4. Верифікаційні сценарії

Верифікаційне тестування системи К-МРС охоплює три сценарії, що відтворюють типові та граничні режими роботи сепаратора ПБМ-90/250 у межах Рівня 3 верифікації (§4.1.2): стабілізацію при вимірювальному шумі (Сценарій-S1, §4.4.1), відстеження повільного дрейфу параметрів (Сценарій-S4, §4.4.2) та виявлення і обробку аномалій (Сценарій-S5, §4.4.3).

4.4.1. Сценарій-S1: стабілізація при вимірювальному шумі

Сценарій-S1 перевіряє здатність системи стабілізувати вихідні змінні при номінальних параметрах процесу та реалістичному рівні вимірювального шуму. Тривалість моделювання — 240 кроків (4 години реального часу при $T_s = 60$ с). Рівні шуму відповідають характеристикам промислових вимірювальних каналів ГЗК Кривбасу: $\sigma_{\text{noise}}(\beta_{Fe}) = 1.5$ % (XRF-аналізатор), $\sigma_{\text{noise}}(\varepsilon) = 2.0$ % (розрахунковий). Дрейф параметрів процесу відсутній — сценарій ізолює вплив шуму від інших збурень.

Порівняння виконано для трьох стратегій: Open-loop, ПІД-регулятор (PID) та К-МРС. Результати наведено у табл. 4.4.

Таблиця 4.4 Порівняння якості керування у Сценарії-S1 (стабілізація при шумі)

Метрика	Open-loop	PID	K-MPC
RMSE _β , %	3.0–4.0	1.2–1.5	0.5–0.7
RMSE _ε , %	5.0–7.0	2.0–2.5	1.0–1.4
Порушення $\beta_{Fe} < 65$ %, % часу	15–25	3–5	< 1
Shadow Mode: RMSE < 0.8 %	—	—	✓

Система K-MPC забезпечує $RMSE_{\beta} = 0.5\text{--}0.7$ %, що у 2–3 рази менше за PID (1.2–1.5 %) та у 5–7 разів менше за Open-loop (3.0–4.0 %). Аналогічне співвідношення для $RMSE_{\epsilon}$: K-MPC (1.0–1.4 %) перевищує PID (2.0–2.5 %) приблизно удвічі, а Open-loop (5.0–7.0 %) — у 4–5 разів. Частка порушень $\beta_{Fe} < 65$ % знижується від 15–25 % (Open-loop) до менш ніж 1 % (K-MPC), що відповідає вимогам технологічного регламенту.

Критерій переходу до Shadow Mode ($RMSE < 0.8$ %) виконується для K-MPC, що підтверджує готовність системи до Фази 2 впровадження (§4.5.2). Значення RMSE узгоджені з результатами колінеарного BNK (§3.6.2).

4.4.2. Сценарій-S4: повільний дрейф параметрів

Сценарій-S4 моделює повільну зміну властивостей руди протягом тривалого експлуатаційного періоду. Тривалість моделювання — 480 кроків (8 годин реального часу), розділено на 4 епізоди по 120 кроків (2 години). Інтенсивність дрейфу поступово зростає від нульової (епізод 1) до максимальної (епізод 4), що дозволяє оцінити ефективність адаптивного механізму при різній глибині зміни параметрів.

Порівняння виконано між статичною KRR-моделлю (навчена одноразово, без оновлення) та адаптивною KRR з ковзним вікном (Стратегія-S4, §2.4). Алгоритм диференціює два типи нестаціонарності: аномалії виключаються SVR-фільтром до потрапляння у вікно, а повільний дрейф відстежується перенавчанням KRR на оновлених даних. Результати наведено у табл. 4.5.

Таблиця 4.5 Порівняння статичної та адаптивної KRR у Сценарії-S4 (повільний дрейф)

Епізод	Умова	RMSE статичної KRR	RMSE адаптивної KRR	Примітка
1 (0–2 год)	Без дрейфу	0.08–0.10	0.08–0.10	Моделі ідентичні
2 (2–4 год)	Дрейф $\approx 5\%$	1.5–2.5	0.18–0.22	Адаптація відстежує
3 (4–6 год)	Дрейф продовжуєтьс я	4.0–5.5	0.20–0.25	Статична деградує
4 (6–8 год)	Максимальни й дрейф	6.5–8.0	0.22–0.28	Статична непрацездатна
Середнє	—	3.0–4.0	0.17–0.21	15–20×

У першому епізоді (без дрейфу) обидві моделі демонструють однакову якість ідентифікації ($RMSE = 0.08–0.10$), що підтверджує відсутність деградації адаптивного механізму у стаціонарних умовах. З розвитком дрейфу (епізоди 2–4) статична модель прогресивно деградує:

RMSE зростає від 1.5–2.5 до 6.5–8.0, тоді як адаптивна зберігає $RMSE \leq 0.28$ протягом усього моделювання.

Середнє покращення адаптивної KRR відносно статичної — 15–20× по чотирьох епізодах. Максимальне значення RMSE статичної моделі у епізоді 4 (6.5–8.0) відповідає значенню 7.98, характерному для сценарію зміни типу руди $M \rightarrow Q$ (§3.4.3). При зміні типу руди покращення досягає 25–36× (§3.4.3).

4.4.3. Сценарій-S5: виявлення та обробка аномалій

Сценарій-S5 перевіряє здатність SVR-фільтра (§2.4.3) виявляти аномальні вимірювання та запобігати їхньому потраплянню у навчальну вибірку адаптивного ковзного вікна. Аномалії моделюються як раптові стрибки вимірювань, що виходять за межі нормального розподілу шуму. Результати наведено у табл. 4.6.

Таблиця 4.6 Характеристики SVR-фільтра аномалій (Сценарій-S5)

Метрика	Вимога	Результат	Обґрунтування
Precision	≥ 0.85	≥ 0.90	$P(\text{хибне спрацювання}) \approx 1.2 \% \text{ при } \kappa = 2.5$
Recall	≥ 0.80	≥ 0.85	Пропущені — лише аномалії $2.5\text{--}3\sigma$
Час відновлення	—	3–5 тактів	§2.4.3
RMSE з фільтром / без фільтра	—	0.22 / 1.8	Стратегія-S4 vs Стратегія-S1

SVR-фільтр досягає $Precision \geq 0.90$ (перевищує вимогу ≥ 0.85), що означає $P(\text{хибне спрацювання}) \approx 1.2 \% \text{ при порозі } \kappa = 2.5$. $Recall \geq 0.85$ (перевищує вимогу ≥ 0.80): пропускаються лише аномалії амплітудою $2.5\text{--}3\sigma$, що наближаються до нормального шуму. Час відновлення після аномалії

— 3–5 тактів (§2.4.3), що є прийнятним для процесу зі сталою часу $T = 300\text{--}600$ с.

Вплив SVR-фільтра кількісно характеризується відношенням RMSE: з фільтром (Стратегія-S4, §2.4.2) $\text{RMSE} = 0.22$, без фільтра (Стратегія-S1) $\text{RMSE} = 1.8$. Зменшення RMSE у 8.2 рази підтверджує ефективність дворівневої обробки аномалій. Слід зазначити, що «Стратегія-S1» та «Стратегія-S4» відносяться до стратегій адаптації (§2.4.2), а не до верифікаційних сценаріїв BNK.

Три верифікаційні сценарії підтверджують відповідність системи K-MPC встановленим критеріям якості: $\text{RMSE}_\beta = 0.5\text{--}0.7\%$ при стабілізації (Сценарій-S1) задовольняє умову переходу до Shadow Mode; адаптивна KRR забезпечує покращення $15\text{--}20\times$ відносно статичної моделі при тривалому дрейфі (Сценарій-S4); SVR-фільтр знижує RMSE у 8.2 рази при $\text{Precision} \geq 0.90$ і $\text{Recall} \geq 0.85$ (Сценарій-S5). Сукупність результатів формує підставу для переходу до стратегії промислового впровадження, описаної у §4.5.

4.5. Стратегія промислового впровадження

На основі результатів MiL-верифікації (§4.4) розроблено план переходу системи K-MPC до промислової експлуатації відповідно до ІЕС 62381 [75], що передбачає чотири послідовні фази з кількісними критеріями переходу: офлайн-навчання (§4.5.1), Shadow Mode (§4.5.2), Advisory (§4.5.3) та Closed Loop з механізмом обмеженого авторитету (§4.5.4).

4.5.1. Фаза 1: офлайн-навчання

Перша фаза передбачає навчання KRR-моделі за даними, зібраними з діючого сепаратора ПБМ-90/250 без втручання у технологічний процес. Навчальна вибірка формується шляхом реєстрації вхідних (B , ρ , Q) та вихідних (β_{Fe} , ε) змінних протягом штатної роботи з достатньою

варіативністю режимів. Мінімальний обсяг вибірки — $n \geq 500$ точок, що забезпечує адекватну апроксимацію нелінійних залежностей (§2.2).

Фаза Offline-ідентифікації становить механізм зняття методологічного припущення П-1 (Додаток А) щодо синтетичного джерела навчальних даних: KRR-модель, навчена на верифікаційному симуляторі PlantDynamics у дисертаційному дослідженні, заміщається моделлю, навченою на промислових даних діючого сепаратора. Кількісні характеристики методології (структура SVR+KRR+GP, аналітичний градієнт, гарантії стійкості §3.4) переносяться без змін, проте конкретні значення RMSE, σ^* та λ^* підлягають калібруванню за промисловими даними.

Критерій переходу до Фази 2: RMSE < 0.8 % на тестовій підвибірці (LOO-крос-валідація). Орієнтовна тривалість — 2–4 тижні, що визначається часом накопичення достатньої вибірки при природній варіативності режимів.

Зведену таблицю фаз впровадження з критеріями переходу наведено у табл. 4.7.

Таблиця 4.7 Фази впровадження та критерії переходу

Фаза	Вхідна умова	Критерій переходу	Тривалість
1. Офлайн	$n \geq 500$	RMSE < 0.8 %	2–4 тижні
2. Shadow	Фаза 1	RMSE < 0.8 % (72 год); ПЗ > 99.9 %	72 год
3. Advisory	Фаза 2	> 60 % прийнятих рекомендацій (14 діб)	14 діб
4. Closed Loop	Фаза 3	$\Delta B \leq 0.005$ Тл/крок; КРІ 30 діб	30+ діб

Загальна тривалість фаз ПЗ (Офлайн + Shadow + Advisory + Closed Loop) становить приблизно 7–8 тижнів. Повний проектний цикл з урахуванням інфраструктурних робіт — приблизно 4–6 місяців.

4.5.2. Фаза 2: Shadow Mode

У режимі Shadow Mode система K-MPC працює паралельно з діючою системою керування, виконує всі обчислення (ідентифікацію, прогнозування, оптимізацію), але не впливає на процес. Керуючі впливи реєструються та порівнюються з фактичними діями оператора або існуючої системи регулювання. Цей режим відповідає процедурі SAT Passive за IEC 62381 [75].

Критерії переходу до Фази 3 є подвійними. Перший — якість прогнозування: $RMSE < 0.8 \%$ протягом безперервного інтервалу 72 години (4320 тактів при $T_s = 60$ с); тривалість обрана для охоплення повного добового циклу з урахуванням типових змін параметрів руди. Другий — готовність ПЗ $> 99.9 \%$ протягом того самого інтервалу, що відповідає допустимому простою не більше 4.3 хвилини на 72 години.

Режим Shadow Mode виконує додаткову функцію — верифікацію адекватності KRR-моделі у реальних промислових умовах. Відхилення RMSE від значень MiL-верифікації (§4.4.1) свідчить про неадекватність параметризації PlantDynamics і потребує коригування моделі.

4.5.3. Фаза 3: Advisory Mode

У режимі Advisory система K-MPC генерує рекомендації оператору щодо зміни керуючих впливів, але остаточне рішення залишається за оператором. Кожна рекомендація відображається на екрані SCADA (рівень L3, §4.2.1) з обґрунтуванням: прогнозованим значенням β_{Fe} та ε при виконанні рекомендації та при збереженні поточного режиму. Оператор має 5-хвилинне вікно для прийняття або відхилення.

Критерій переходу до Фази 4: частка прийнятих рекомендацій перевищує 60 % протягом 14 діб. Поріг 60 % є компромісним: нижчий не забезпечує достатньої статистичної впевненості, вищий — може бути недосяжним через консерватизм персоналу. Тривалість 14 діб забезпечує охоплення різних змін, типів руди та технологічних режимів.

Фаза Advisory є критичною для побудови довіри операторського персоналу до системи. Досвід впровадження MPC на металургійних підприємствах свідчить, що поступовий перехід через Advisory-режим знижує ризик відторгнення системи [80].

4.5.4. Фаза 4: Closed Loop та механізм обмеженого авторитету

У режимі замкненого контуру (Closed Loop) система K-MPC безпосередньо керує процесом магнітної сепарації без участі оператора у штатних режимах. Для забезпечення безпеки реалізовано механізм обмеженого авторитету (Limited Authority Control, LAC).

Механізм LAC обмежує максимально допустимі прирости керуючих впливів за один такт: $\Delta B \leq 0.005$ Тл/крок (≈ 5 % від робочого діапазону), $\Delta \rho \leq 20$ кг/м³/крок, $\Delta Q \leq 50$ м³/год/крок. Оскільки В задається оператором вручну (§2.3.1, §4.6), обмеження $\Delta B \leq 0.005$ Тл/крок для каналу В діє як межа допустимого ручного (рекомендаційного) кроку, а не автоматичної відпрацьовки контролером; для автоматичних каналів ρ та Q обмеження $\Delta \rho$ і ΔQ реалізуються безпосередньо у задачі QP. Ці обмеження визначено технологічним регламентом та паспортом обладнання і відповідають максимально допустимій швидкості зміни параметрів без порушення стабільності процесу.

Захист реалізовано на двох рівнях. На рівні контролера (MPCController, §4.3.1) обмеження включено у задачу QP як лінійні обмеження на вектор приростів ΔU [51], що забезпечує їхнє виконання за побудовою оптимального розв'язку. На рівні ПЛК (L0–L1, §4.2.1)

обмеження реалізовано апаратно, незалежно від ПЗ К-МРС. Подвійний захист гарантує виконання обмежень навіть у разі програмного збою контролера.

Ключові показники ефективності (KPI) для режиму Closed Loop наведено у табл. 4.8.

Таблиця 4.8 KPI режиму Closed Loop

KPI	Ціль	Джерело
RMSE _β (30 діб)	< 0.8 %	§4.5.2
Порушення $\beta_{Fe} < 65$ %	< 1 %	§4.4.1
Готовність ПЗ	> 99.9 %	IEC 62381
Підвищення ε	$\geq 1-2$ %	BNK S1

Критерій стабільності — дотримання всіх KPI протягом 30 діб безперервної експлуатації. Економія електроенергії за рахунок оптимізації магнітної індукції B у принципі досяжна для сепараторів з електромагнітним збудженням поля, де B регулюється електрично. Проте для сепаратора ПБМ-90/250, магнітну систему якого утворюють постійні магніти (§4.6), індукція B задається конструкцією і не змінюється електрично, тому пряма економія електроенергії за цим механізмом для даного об'єкта фізично відсутня і до KPI не включається. Підвищення ε на 1–2 % є наслідком стабілізації технологічного режиму у зоні оптимуму за рахунок автоматичного керування густиною пульпи ρ та витратою Q .

Чотирифазовий план впровадження відповідно до IEC 62381 забезпечує контрольований перехід від MiL-верифікації до замкненого промислового керування з кількісними критеріями на кожному етапі. Механізм LAC з подвійним захистом (QR-обмеження у контролері та апаратний захист на рівні ПЛК) гарантує безпеку керуючих впливів

протягом усіх фаз. Загальна тривалість фаз ПЗ — 7–8 тижнів; повний проектний цикл з інфраструктурними роботами — 4–6 місяців.

4.6 Функціональна схема підключення сепаратора ПБМ-90/250 до системи керування К-МРС

Розроблену систему предиктивного керування (розділи 2–3) на реальному об'єкті реалізують засобами типової обв'язки збагачувальної секції. Узагальнена функціональна схема підключення наведена на рис. 4.2; вона зводить рівневу інформаційну інфраструктуру (§4.2) та стратегію поетапного впровадження (§4.5) у єдину картину «об'єкт — обв'язка — система керування» і завершує опис практичної реалізації.

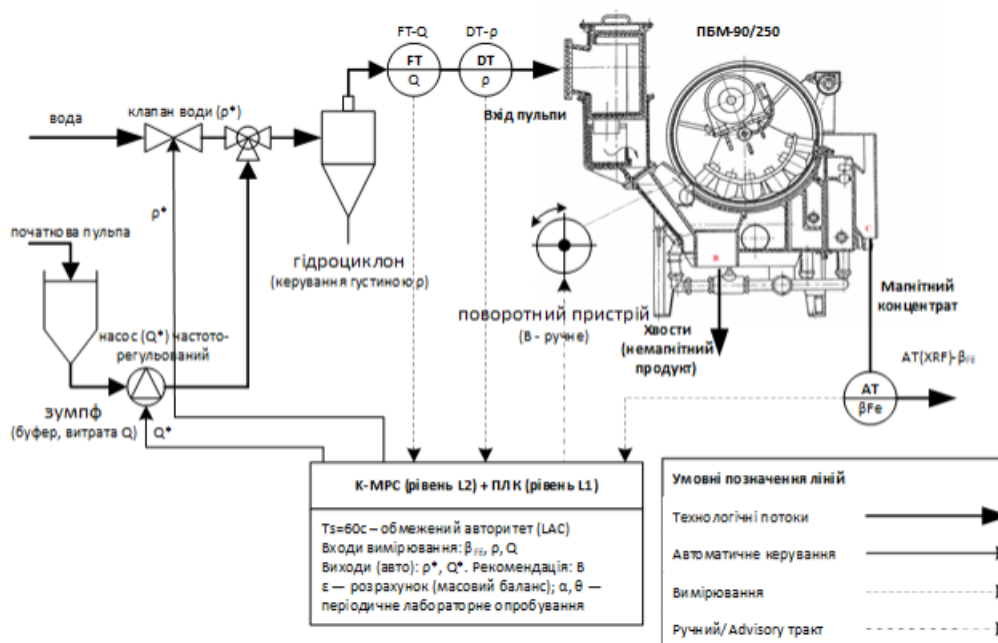


Рис 4.2 — Схема підключення сепаратора ПБМ-90/250 до системи керування К-МРС

Об'єктом керування є барабанний магнітний сепаратор ПБМ-90/250. Вихідна пульпа надходить у зумпф (буфер), звідки частотно-регульованим насосом подається на гідроциклон і далі через завантажувальну (розподільчу) коробку у ванну сепаратора (точка А — вхід пульпи). Магнітний продукт виноситься обертовим барабаном у приймальну

(розвантажувальну) коробку (точка С — вихід концентрату), а немагнітна фракція розвантажувється через хвостову щілину та хвостові патрубки (точка В — вихід хвостів). Розрідження живлення та промивка концентрату здійснюються водою з бризгал.

Автоматичному керуванню в реальному часі з тактом $T_s = 60$ с підлягають дві змінні. Об'ємна витрата живлення Q регулюється частото-регульованим приводом насоса зумпфа (керуючий сигнал Q^*), а густина пульпи ρ — режимом роботи гідроциклона та клапаном розріджувальної води (сигнал ρ^*). Обидва сигнали формуються контролером К-МРС (рівень L2) і відпрацьовуються програмованим логічним контролером (рівень L0–L1) з дотриманням обмежень на прирости керуючих впливів за такт ($\Delta\rho \leq 20$ кг/м³, $\Delta Q \leq 50$ м³/год; §4.5.4).

Магнітна індукція B у сепараторах типу ПБМ задається конструкцією постійних магнітів і не змінюється електрично; регулюванню підлягає лише кутове положення магнітної системи через поворотний пристрій, що виконується вручну оператором. Тому B віднесено до квазістатичних параметрів режиму: система К-МРС формує для B лише рекомендацію (advisory), яку оператор реалізує вручну при зміні режиму, а не на кожному такті. Відповідно обмеження ΔB (§4.5.4) трактується як гранична зміна при переналаштуванні режиму, а не за окремий такт керування.

Зворотний зв'язок забезпечують три вимірювальні канали. Рентгенофлуоресцентний аналізатор (XRF) на потоці концентрату визначає вміст заліза β_{Fe} ($\sigma = 1.5$ %); густиномір вимірює ρ , а витратомір — Q на напірній лінії після насоса. Коефіцієнт вилучення ε онлайн не вимірюється, а обчислюється за масовим балансом за двопродуктовою формулою

$$\varepsilon = \beta(\alpha - \theta)/[\alpha(\beta - \theta)], \quad (4.1)$$

де $\beta = \beta_{Fe}$ — вміст заліза в концентраті (точка С), α — у живленні (точка А), θ — у хвостах (точка В). Вмісти α і θ визначаються періодичним лабораторним опробуванням, тому ε є розрахунковою (оцінною) величиною ($\sigma = 2.0 \%$). Вимірювальна інформація передається за схемою датчики $\rightarrow$ ПЛК (рівень L1) $\rightarrow$ К-МРС (рівень L2) каналом OPC UA (§4.2.2).

Поділ керуючих впливів на динамічні (ρ , Q) і ручний (B) зумовлений фізичною реалізованістю виконавчих механізмів: насос і гідроциклон із клапаном дозволяють безперервне регулювання, тоді як магнітне поле сепаратора ПБМ змінюється лише дискретно й вручну. При цьому прогнозна ядерна модель $f(B, \rho, Q) \rightarrow (\beta_{Fe}, \varepsilon)$ (§2.2) зберігається повністю: магнітна індукція B входить у модель як параметр режиму, а на кожному такті розв'язується задача оптимального керування відносно (ρ , Q) за фіксованого B . Такий підхід узгоджує математичний апарат (розділи 2–3) з реальними обмеженнями обладнання, не змінюючи структури моделі.

Отже, підключення розробленої системи реалізується типовими засобами збагачувальної секції: динамічний контур керування (ρ , Q) є автоматичним у складі К-МРС та ПЛК, а магнітне поле B — ручним (рекомендаційним) параметром режиму. Наведена схема (рис. 4.2) підтверджує практичну реалізованість інтеграції системи предиктивного керування К-МРС у діючу автоматизовану систему керування технологічним процесом без зміни конструкції сепаратора ПБМ-90/250.

Висновки до розділу 4

Специфіковано об'єкт керування — барабанний магнітний сепаратор ПБМ-90/250 — та обґрунтовано методологію верифікації: визначено робочі діапазони керуючих (B , ρ , Q) і вихідних (β_{Fe} , ε) змінних, рівні вимірювального шуму ($\sigma_{noise}(\beta_{Fe}) = 1,5 \%$, $\sigma_{noise}(\varepsilon) = 2,0 \%$) і часові характеристики процесу ($T_s = 60$ с, $\tau = 120\text{--}180$ с, $T = 300\text{--}600$ с), з яких впливає горизонт прогнозу $N_p = 10 \geq T/T_s$; з огляду на неприпустимість

активних експериментів на діючому обладнанні прийнято чотирирівневу процедуру Model-in-the-Loop за IEC 62381 (модульне, інтеграційне, сценарне тестування та колінеарний BNK), що формує методологічно коректне підґрунтя для побудови ієрархії керування та налаштування програмної реалізації.

Спроековано інтеграцію K-MPC у промислову ієрархію автоматизації за стандартом ISA-95 у складі трьох рівнів (L0–L1 — ПЛК з протиаварійним захистом; L2 — K-MPC із тактом $T_s = 60$ с; L3 — MES/SCADA) з обміном за протоколом OPC UA та потоком даних датчики $\rightarrow$ ПЛК (L1) $\rightarrow$ K-MPC (L2) $\rightarrow$ ПЛК, у якому SCADA під'єднано паралельно поза часокритичним контуром; встановлено вимогу до сумарної затримки контуру не більше $T_s/10 = 6$ с (з яких обчислення K-MPC становлять лише $p_{95} \approx 3,02$ мс) та дворівневу перевірку достовірності вимірювань (діапазонний контроль ПЛК і SVR-фільтр з $\text{Precision} \geq 0,90$ і $\text{Recall} \geq 0,85$), чим визначено функціональні вимоги до програмних модулів.

Реалізовано програмне забезпечення системи у вигляді модульної чотирирівневої архітектури (PlantDynamics з вектором стану $x \in \mathbb{R}^8$ та інтегруванням RK4; KernelModel із KRR, LOO-крос-валідацією та аналітичним градієнтом складності $O(n \cdot d)$; MPCController із QP-розв'язувачем OSQP при $N_p = 10$, $N_c = 3$; AdaptiveIdentifier із SVR-фільтром, ковзним вікном і GP-наглядачем), параметризованої за даними п'яти ГЗК Криворізького басейну для трьох типів руди (M, MX, Q); побудовано колінеарну MiL-платформу з трьома режимами на єдиній моделі PlantDynamics (обсяг навчальної вибірки $n = 500$), що усуває методологічний артефакт різних моделей і гарантує коректність порівняння алгоритмів.

Підтверджено працездатність системи на трьох верифікаційних сценаріях: у режимі стабілізації при шумі (Сценарій-S1) K-MPC забезпечує

$RMSE_{\beta} = 0,5\text{--}0,7 \%$, що у 2–3 рази менше за PID і задовольняє критерій переходу до Shadow Mode ($RMSE < 0,8 \%$); при тривалому повільному дрейфі параметрів (Сценарій-S4) адаптивна KRR утримує $RMSE \leq 0,28$ проти прогресуючої деградації статичної моделі, що дає середнє покращення у 15–20 разів; SVR-фільтр аномалій (Сценарій-S5) знижує $RMSE$ у 8,2 рази при $Precision \geq 0,90$ і $Recall \geq 0,85$, чим доведено ефективність трирівневої адаптивної архітектури в умовах, наближених до промислових.

Розроблено чотирифазний план промислового впровадження відповідно до ІЕС 62381 з кількісними критеріями переходу між фазами (офлайн-навчання за вибіркою $n \geq 500$ з критерієм $RMSE < 0,8 \%$; Shadow Mode за готовності ПЗ $> 99,9 \%$ протягом 72 годин; Advisory за часткою прийнятих рекомендацій понад 60 % за 14 діб; Closed Loop із контролем КРІ протягом 30 діб); безпеку керування забезпечено механізмом обмеженого авторитету ($\Delta B \leq 0,005$ Тл/крок, $\Delta \rho \leq 20$ кг/м³/крок, $\Delta Q \leq 50$ м³/год/крок) з подвійним захистом на рівні QR-обмежень контролера та апаратно на рівні ПЛК; орієнтовна тривалість фаз ПЗ — 7–8 тижнів, очікуваний технологічний ефект — підвищення коефіцієнта вилучення на 1–2 % за рахунок стабілізації режиму. Економія електроенергії шляхом оптимізації магнітної індукції B для сепаратора ПБМ-90/250 не передбачається, оскільки його магнітну систему утворюють постійні магніти (§4.6); такий ефект досяжний лише на сепараторах з електромагнітним збудженням поля.

Розроблено узагальнену функціональну схему підключення сепаратора ПБМ-90/250 до контуру К-МРС (рис. 4.2) типовими засобами збагачувальної секції, у якій автоматичному керуванню з тактом $T_s = 60$ с підлягають лише густина пульпи ρ (гідроциклон і клапан розріджувальної води) та об'ємна витрата Q (частотно-регульований привод насоса), тоді як магнітну індукцію B — зважаючи на її формування постійними магнітами

без електричного регулювання — віднесено до квазістатичних параметрів режиму з ручним (рекомендаційним) налаштуванням оператором; при цьому прогнозу ядерну модель $f(B, \rho, Q) \rightarrow (\beta_{Fe}, \varepsilon)$ збережено повністю (B входить як параметр режиму, а задача оптимізації щотакту розв'язується відносно (ρ, Q)), що узгоджує математичний апарат розділів 2–3 з фізичними обмеженнями обладнання й підтверджує практичну реалізованість інтеграції без зміни конструкції сепаратора, завершуючи розв'язання задачі 4 дослідження.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі вирішено актуальну науково-технічну проблему підвищення якості керування процесом магнітної сепарації залізних руд на гірничо-збагачувальних комбінатах Криворізького басейну. Проблема зумовлена нелінійним характером статичних характеристик об'єкта, параметричною нестаціонарністю, транспортним запізненням та жорсткими технологічними обмеженнями, що в сукупності утворюють системне протиріччя між вимогами нелінійної адекватності, обчислювальної ефективності та інтерпретованості прогнозової моделі у контурі предиктивного керування. Для подолання цього протиріччя запропоновано методологію побудови інтегрованої системи предиктивного керування К-МРС на основі ядерної гребеневої регресії з RBF-ядром. Усі чотири поставлені завдання дослідження розв'язано, що підтверджується такими основними науковими та практичними результатами:

1. У межах задачі 2 теоретично обґрунтовано, що серед розглянутих методів ядерної регресії лише KRR з RBF-ядром забезпечує замкнений аналітичний градієнт, необхідний для коректного перетворення задачі нелінійного програмування на опуклу QP-задачу в контурі предиктивного керування. Чисельно перевірено: аналітичний градієнт відтворює числовий еталон з похибкою менш ніж 10^{-6} при шестикратному прискоренні обчислень і забезпечує гарантовану строгу опуклість QP-задачі.

2. У межах задачі 2 аналітично встановлено достатню умову самозабезпечення прийнятності лінеаризації нелінійної ядерної моделі, за якою матриця штрафних ваг $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u^2_{\max})$ автоматично утримує похибку лінеаризації на рівні $\epsilon_{\text{lin}} \approx 0,11\text{--}0,28\%$ (проти допустимого $\delta_{\max} = 5\%$) без зовнішнього механізму trust region, із використанням лише 15–24 % допустимого діапазону приростів керування.

3. У межах задачі 2 набув подальшого розвитку підхід до побудови адаптивної системи ідентифікації, в якому три методи ядерної регресії об'єднано через спільний RKHS із функціональною спеціалізацією (SVR — фільтр аномалій, KRR — прогнозна модель, GP — наглядч невизначеності). Чисельно перевірено: запропонована архітектура підвищує точність ідентифікації у 36,3 рази при зміні типу руди та у 15–20 разів при повільному дрейфі параметрів відносно статичної KRR-моделі.

4. У межах задачі 3 набув подальшого розвитку метод доведення асимптотичної стійкості систем предиктивного керування — спеціалізацією для K-MPC з нелінійною ядерною моделлю; через двомеханізмний коридор стійкості (локальне самозабезпечення прийнятності лінеаризації та термінальний член) теоретично доведено монотонне спадання функції Ляпунова з показником збіжності $\lambda_{\max} \approx 0,819 < 1$. Чисельно перевірено: стрес-тестування при варіації ширини ядра у діапазоні $\pm 30\%$ підтвердило збереження сформульованих умов стійкості.

5. У межах задачі 2 вперше запропоновано стратегію адаптивного консервативного керування, в якій матриця штрафних ваг $R(k)$ автоматично збільшується пропорційно апостеріорній дисперсії σ^2_{GP} GP-наглядача при виході робочої точки за межі навчального домену. Чисельно перевірено: стратегія знижує RMSE ідентифікації з 0,3–0,5 (архітектура без GP-наглядача) до 0,22 нормалізованих одиниць та скорочує час відновлення з 6–9 до 5–8 тактів.

6. У межах задачі 3 на колінеарній MiL-платформі (30 запусків за шістьма методами керування у трьох сценаріях на єдиній моделі технологічного процесу) експериментально підтверджено переваги K-MPC: $RMSE_{\beta} = 0,5\text{--}0,7\%$ проти $1,2\text{--}1,5\%$ у ПІД-регулятора, нульове перерегулювання при відпрацюванні зміни уставки та зниження частки порушень технологічного обмеження $\beta_{Fe} < 65\%$ з $3\text{--}5\%$ до менш ніж 1% ,

із досягненням якості нелінійного MPC при 17–70-кратному зменшенні часу обчислення.

7. У межах задачі 4 програмно реалізовано К-MPC у вигляді модульної чотирирівневої архітектури, параметризованої за даними п'яти ГЗК Криворізького басейну для трьох типів руди. Виміряно на MiL-платформі: повний End-to-End час циклу не перевищує $t_{p95} \approx 3,02$ мс при запасі реального часу приблизно у 20 000 разів відносно такту дискретизації 60 с.

8. У межах задачі 4 розроблено чотирифазний план промислового впровадження відповідно до ІЕС 62381 з кількісними критеріями переходу між фазами та механізмом обмеженого авторитету ($\Delta V \leq 0,005$ Тл/крок, $\Delta \rho \leq 20$ кг/м³/крок, $\Delta Q \leq 50$ м³/год/крок) з подвійним захистом на рівні QR-обмежень контролера та апаратно на рівні ПЛК.

Практична цінність отриманих результатів підтверджена на колінеарній MiL-платформі на верифікаційних сценаріях, наближених до промислових умов; очікуваний технологічний ефект від упровадження — підвищення коефіцієнта вилучення на 1–2 % за рахунок стабілізації технологічного режиму у зоні оптимуму. Економія електроенергії шляхом оптимізації магнітної індукції B для сепаратора ПБМ-90/250 не передбачається, оскільки його магнітну систему утворюють постійні магніти; такий ефект досяжний лише на сепараторах з електромагнітним збудженням поля.

Перспективи подальших досліджень пов'язані з розширенням К-MPC на каскад послідовних стадій збагачення з урахуванням міжстадійних взаємозв'язків, інтеграцією онлайн-навчання KRR-моделі з потоковими даними промислових сенсорів та дослідженням застосовності розробленої методології до суміжних процесів мінеральної переробки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. B. A. Wills i J. A. Finch, *Wills' Mineral Processing Technology: An Introduction to the Practical Aspects of Ore Treatment and Mineral Recovery*, 8е вид. Butterworth-Heinemann (Elsevier), 2016.
2. С. П. Шуваєв, «Розробка, освоєння і впровадження технології виробництва марганцевого агломерату та марганцевих феросплавів з використанням концентрату високоінтенсивної магнітної сепарації шламу», Дисертація кандидата технічних наук, Національна металургійна академія України, Дніпро, 2018. Дата звернення: 2026. 09 чер. [URL]. Доступний у: https://nmetau.edu.ua/file/diss_shuvaev.pdf
3. «Сепаратор ПБМ-90/250». Дата звернення: 2026. 09 чер. [URL]. Доступний у: <https://ua.all.biz/uk/separator-pbm-90250-g1671895>
4. O. Porkuian, V. Morkun, N. Morkun, i O. Serdyuk, «Predictive Control of the Iron Ore Beneficiation Process Based on the Hammerstein Hybrid Model», *Acta Mech. Autom.*, т. 13, вип. 4, С. 262—270, 2019, doi: 10.2478/ama-2019-0036.
5. V. Morkun, N. Morkun, i V. Tron, «Identification of control systems for ore-processing industry aggregates based on nonparametric kernel estimators», *Metall. Min. Ind.*, т. 7, вип. 1, С. 14—17, 2015.
6. M. Perreault, B. Tougas, J.-S. Boisvert, i G. Fontaine, «Online XRF Analysis of Elements in Minerals on a Conveyor Belt», *Analytica*, т. 5, вип. 4, С. 77, 2025, doi: 10.3390/analytica5040077.
7. V. Morkun, N. Morkun, V. Tron, O. Porkuian, O. Serdiuk, i T. Sulyma, «Application of Magnetic and Ultrasonic Methods for Determining Parameters of Ferromagnetic Components in Iron Ore Slurry Flows», *Acta Mech. Autom.*, т. 15, вип. 3, С. 170—179, 2021, doi: 10.2478/ama-2021-0025.
8. N. V. Morkun, V. S. Morkun, V. V. Tron, O. Y. Serdiuk, i A. A. Haponenko, «Complex measurement of parameters of iron ore magnetic

separation based on ultrasonic methods», *Nauk. Visnyk Natsionalnoho Hirnychoho Universytetu*, вип. 3, С. 37—43, 2022, doi: 10.33271/nvngu/2022-3/037.

9. V. Morkun, N. Morkun, i V. Tron, «Model synthesis of nonlinear nonstationary dynamical systems in concentrating production using Volterra kernel transformation», *Metall. Min. Ind.*, т. 7, вип. 10, С. 6—9, 2015.

10. V. Morkun, N. Morkun, V. Tron, i S. Hryshchenko, «Synthesis of robust controllers for the control systems of technological units at iron ore processing plants», *East.-Eur. J. Enterp. Technol.*, т. 1, вип. 2 (91), С. 37—47, 2018, doi: 10.15587/1729-4061.2018.119646.

11. C. M. Cheng, Z. K. Peng, W. M. Zhang, i G. Meng, «Volterra-series-based nonlinear system modeling and its engineering applications: A state-of-the-art review», *Mech. Syst. Signal Process.*, т. 87, С. 340—364, 2017, doi: 10.1016/j.ymssp.2016.10.029.

12. A. Kupin, «Principles of intellectual control and classification optimization in conditions of sophisticated technological processes of beneficiation complexes», у *Proceedings of the 1st International Workshop on Information Technologies in Economic Research (ITER 2014)*, у CEUR Workshop Proceedings, vol. 1356. 2014, С. 1—12. [URL]. Доступний у: https://ceur-ws.org/Vol-1356/paper_34.pdf

13. S. J. Qin i T. A. Badgwell, «A survey of industrial model predictive control technology», *Control Eng. Pract.*, т. 11, вип. 7, С. 733—764, 2003, doi: 10.1016/S0967-0661(02)00186-7.

14. D. Q. Mayne, J. B. Rawlings, C. V. Rao, i P. O. M. Scokaert, «Constrained model predictive control: Stability and optimality», *Automatica*, т. 36, вип. 6, С. 789—814, 2000, doi: 10.1016/S0005-1098(99)00214-9.

15. L. C. Coetzee, I. K. Craig, i E. C. Kerrigan, «Robust Nonlinear Model Predictive Control of a Run-of-Mine Ore Milling Circuit», *IEEE Trans. Control*

Syst. Technol., т. 18, вип. 1, С. 222—229, 2010, doi: 10.1109/TCST.2009.2014641.

16. C. Muñoz i A. Cipriano, «An integrated system for supervision and economic optimal control of mineral processing plants», *Miner. Eng.*, т. 65, С. 70—79, 2014, doi: 10.1016/j.mineng.2014.05.009.

17. FLSmidth A/S, «Advanced Process Control Solutions». 2024. . [URL].
Доступний у: <https://fls.com/en/parts-and-services/process-automation/advanced-process-control>

18. Metso Corporation, «Advanced Process Control Solutions». 2024. . [URL].
Доступний у: <https://www.metso.com/portfolio/advanced-process-control/>

19. J. B. Rawlings, D. Q. Mayne, i M. M. Diehl, *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design*, 2е вид. Madison, WI: Nob Hill Publishing, 2017.

20. International Electrotechnical Commission, «IEC 62264-1:2013. Enterprise-control system integration – Part 1: Models and terminology». 2013. . [URL].
Доступний у: <https://www.iso.org/standard/57308.html>

21. International Electrotechnical Commission, «OPC Unified Architecture – Part 1: Overview and Concepts». 2020. . [URL].
Доступний у: <https://webstore.iec.ch/en/publication/61109>

22. O. Hasidi *та ін.*, «Digital Twins-Based Smart Monitoring and Optimisation of Mineral Processing Industry», у *Smart Applications and Data Analysis (SADASC 2022)*, у Communications in Computer and Information Science, vol. 1677. Springer, 2022, С. 411—424. doi: 10.1007/978-3-031-20490-6_33.

23. W. Kritzinger, M. Karner, G. Traar, J. Henjes, i W. Sihn, «Digital Twin in manufacturing: A categorical literature review and classification», *IFAC-Pap.*, т. 51, вип. 11, С. 1016—1022, 2018, doi: 10.1016/j.ifacol.2018.08.474.

24. International Electrotechnical Commission, «Industrial communication networks – Network and system security – Part 3-3: System security requirements and security levels». 2013. . [URL]. Доступний у: <https://webstore.iec.ch/en/publication/7033>
25. K. Hornik, M. Stinchcombe, i H. White, «Multilayer feedforward networks are universal approximators», *Neural Netw.*, т. 2, вип. 5, С. 359—366, 1989, doi: 10.1016/0893-6080(89)90020-8.
26. G. E. Karniadakis, I. G. Kevrekidis, L. Lu, P. Perdikaris, S. Wang, i L. Yang, «Physics-informed machine learning», *Nat. Rev. Phys.*, т. 3, вип. 6, С. 422—440, 2021, doi: 10.1038/s42254-021-00314-5.
27. J.-S. R. Jang, «ANFIS: Adaptive-network-based fuzzy inference system», *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.*, т. 23, вип. 3, С. 665—685, 1993, doi: 10.1109/21.256541.
28. J. Lee, B. Bagheri, i H.-A. Kao, «A Cyber-Physical Systems architecture for Industry 4.0-based manufacturing systems», *Manuf. Lett.*, т. 3, С. 18—23, 2015, doi: 10.1016/j.mfglet.2014.12.001.
29. G. Birpoutsoukis, P. Z. Csurcsia, i J. Schoukens, «Efficient multidimensional regularization for Volterra series estimation», *Mech. Syst. Signal Process.*, т. 104, С. 896—914, 2018, doi: 10.1016/j.ymssp.2017.10.007.
30. F. Giri i E.-W. Bai, Ред., *Block-oriented Nonlinear System Identification*, т. 404. y Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 404. Springer, 2010. doi: 10.1007/978-1-84996-513-2.
31. K. Hornik, «Approximation capabilities of multilayer feedforward networks», *Neural Netw.*, т. 4, вип. 2, С. 251—257, 1991, doi: 10.1016/0893-6080(91)90009-T.
32. B. Schölkopf i A. J. Smola, *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*. MIT Press, 2002.

33. C. E. Rasmussen i C. K. I. Williams, *Gaussian Processes for Machine Learning*. Cambridge, MA: MIT Press, 2006. doi: 10.7551/mitpress/3206.001.0001.
34. K. J. Åström i B. Wittenmark, *Adaptive Control*, 2e вид. Dover Publications, 2008.
35. J. Gama, I. Žliobaitė, A. Bifet, M. Pechenizkiy, i A. Bouchachia, «A Survey on Concept Drift Adaptation», *ACM Comput. Surv.*, т. 46, вып. 4, С. 44, 2014, doi: 10.1145/2523813.
36. E. H. Mamdani i S. Assilian, «An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller», *Int. J. Man-Mach. Stud.*, т. 7, вып. 1, С. 1—13, 1975, doi: 10.1016/S0020-7373(75)80002-2.
37. M. Ławryńczuk, *Computationally Efficient Model Predictive Control Algorithms: A Neural Network Approach*, т. 3. y Studies in Systems, Decision and Control, vol. 3. Springer, 2014. doi: 10.1007/978-3-319-04229-9.
38. M. Schwenzer, M. Ay, T. Bergs, i D. Abel, «Review on model predictive control: an engineering perspective», *Int. J. Adv. Manuf. Technol.*, т. 117, вып. 5—6, С. 1327—1349, 2021, doi: 10.1007/s00170-021-07682-3.
39. M. Ellis, H. Durand, i P. D. Christofides, «A tutorial review of economic model predictive control methods», *J. Process Control*, т. 24, вып. 8, С. 1156—1178, 2014, doi: 10.1016/j.jprocont.2014.03.010.
40. I. Goodfellow, Y. Bengio, i A. Courville, *Deep Learning*. MIT Press, 2016.
41. V. N. Vapnik, *The Nature of Statistical Learning Theory*. New York: Springer-Verlag, 1995.
42. J. A. K. Suykens, T. Van Gestel, J. De Brabanter, B. De Moor, i J. Vandewalle, «LS-SVM Regression», y *Least Squares Support Vector Machines*, World Scientific, 2002, С. 93—105.
43. C. A. Micchelli, Y. Xu, i H. Zhang, «Universal Kernels», *J. Mach. Learn. Res.*, т. 7, С. 2651—2667, 2006.

44. I. Steinwart i A. Christmann, *Support Vector Machines*. Springer, 2008.
45. B. Schölkopf, R. Herbrich, i A. J. Smola, «A generalized representer theorem», y *Proceedings of the 14th Annual Conference on Computational Learning Theory*, y *Lecture Notes in Computer Science*, vol. 2111. Berlin: Springer, 2001, С. 416—426. doi: 10.1007/3-540-44581-1_27.
46. H. Wendland, *Scattered Data Approximation*. Cambridge University Press, 2005.
47. J. Nocedal i S. J. Wright, *Numerical Optimization*, 2е вид. Springer, 2006.
48. T. Hastie, R. Tibshirani, i J. Friedman, *The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction*, 2е вид. Springer, 2009.
49. S. Arlot i A. Celisse, «A survey of cross-validation procedures for model selection», *Stat. Surv.*, т. 4, С. 40—79, 2010, doi: 10.1214/09-SS054.
50. R. M. Rifkin i R. A. Lippert, «Notes on Regularized Least Squares», *MIT CSAIL Tech. Rep.*, вип. MIT-CSAIL-TR-2007-025, 2007, [URL]. Доступний у: <https://cbcl.mit.edu/publications/ps/MIT-CSAIL-TR-2007-025.pdf>
51. J. M. Maciejowski, *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall, 2002.
52. H. J. Ferreau, C. Kirches, A. Potschka, i others, «qpOASES: A parametric active-set algorithm for quadratic programming», *Math. Program. Comput.*, т. 6, вип. 4, С. 327—363, 2014, doi: 10.1007/s12532-014-0071-1.
53. H. J. Ferreau, H. G. Bock, i M. Diehl, «An online active set strategy to overcome the limitations of explicit MPC», *Int. J. Robust Nonlinear Control*, т. 18, вип. 8, С. 816—830, 2008, doi: 10.1002/rnc.1251.
54. G. Pannocchia i J. B. Rawlings, «Disturbance models for offset-free model-predictive control», *AIChE J.*, т. 49, вип. 2, С. 426—437, 2003.
55. L. Ljung, *System Identification: Theory for the User*, 2е вид. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall PTR, 1999.

56. A. J. Smola i B. Schölkopf, «A tutorial on support vector regression», *Stat. Comput.*, т. 14, вип. 3, С. 199—222, 2004.
57. D. C. Montgomery, *Introduction to Statistical Quality Control*, 8е вид. John Wiley & Sons, 2019.
58. N. Aronszajn, «Theory of Reproducing Kernels», *Trans. Am. Math. Soc.*, т. 68, вип. 3, С. 337—404, 1950.
59. B. Stellato, G. Banjac, P. Goulart, A. Bemporad, i S. Boyd, «OSQP: An operator splitting solver for quadratic programs», *Math. Program. Comput.*, т. 12, вип. 4, С. 637—672, 2020, doi: 10.1007/s12532-020-00179-2.
60. F. Allgöwer, R. Findeisen, i Z. K. Nagy, «Nonlinear Model Predictive Control: From Theory to Application», у *Journal of the Chinese Institute of Chemical Engineers*, т. 35, 2004, С. 299—315.
61. A. Domahidi, E. Chu, i S. Boyd, «ECOS: An SOCP solver for embedded systems», у *2013 European Control Conference (ECC)*, 2013, С. 3071—3076. doi: 10.23919/ECC.2013.6669541.
62. M. Diehl, H. J. Ferreau, i N. Haverbeke, «Nonlinear model predictive control: towards new challenging applications», *Lect. Notes Control Inf. Sci.*, т. 384, С. 391—417, 2009, doi: 10.1007/978-3-642-01094-1_32.
63. E. C. Kerrigan i J. M. Maciejowski, «Soft constraints and exact penalty functions in model predictive control», у *UKACC International Conference on Control (CONTROL 2000)*, Cambridge, UK: IEEE, 2000, С. 1—6.
64. M. N. Zeilinger, C. N. Jones, i M. Morari, «Robust stability properties of soft constrained MPC», у *49th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, 2010, С. 5276—5282. doi: 10.1109/CDC.2010.5717488.
65. H. Chen i F. Allgöwer, «A Quasi-Infinite Horizon Nonlinear Model Predictive Control Scheme with Guaranteed Stability», *Automatica*, т. 34, вип. 10, С. 1205—1217, 1998.

66. S. S. Keerthi i E. G. Gilbert, «Optimal Infinite-Horizon Feedback Laws for a General Class of Constrained Discrete-Time Systems: Stability and Moving-Horizon Approximations», *J. Optim. Theory Appl.*, т. 57, вип. 2, С. 265—293, 1988, doi: 10.1007/BF00938540.
67. S. S. Shapiro i M. B. Wilk, «An analysis of variance test for normality (complete samples)», *Biometrika*, т. 52, вип. 3/4, С. 591—611, 1965, doi: 10.2307/2333709.
68. G. M. Ljung i G. E. P. Box, «On a measure of lack of fit in time series models», *Biometrika*, т. 65, вип. 2, С. 297—303, 1978, doi: 10.1093/biomet/65.2.297.
69. P. Billingsley, *Probability and Measure*, 3е вид. Wiley, 1995.
70. «IEEE Standard for System, Software, and Hardware Verification and Validation», IEEE, IEEE Std 1012-2016, 2017. doi: 10.1109/IEEESTD.2017.8055462.
71. K. J. Åström i T. Hägglund, *Advanced PID Control*. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society, 2006.
72. D. W. Clarke, C. Mohtadi, i P. S. Tuffs, «Generalized Predictive Control – Part I. The Basic Algorithm», *Automatica*, т. 23, вип. 2, С. 137—148, 1987, doi: 10.1016/0005-1098(87)90087-2.
73. M. A. Hussain, «Review of the applications of neural networks in chemical process control – simulation and online implementation», *Artif. Intell. Eng.*, т. 13, вип. 1, С. 55—68, 1999, doi: 10.1016/S0954-1810(98)00011-9.
74. Т. О. Олійник і Є. О. Безсмертний, «Удосконалення технологічного циклу класифікації в схемах збагачення магнетитових кварцитів», у *Розвиток промисловості та суспільства*, Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2025, С. 20—22. Дата звернення: 2026. 09 чер. [URL].
Доступний у:
<https://www.knu.edu.ua/storage/files/2/%D0%9D%D0%B0%D1%83%D0%BA>

%D0%B0/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D1%96%D1%97/%D0%9A%D0%BE%D0%BD%D1%84%D0%B5%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%86%D1%96%D1%97_2025/rozvytok2025/%D0%A2%D0%B5%D0%B7%D0%B8-2025%20-%20%D0%B7%D0%BC%D1%96%D0%BD%D0%B5%D0%BD%D1%96%2030.06.2025.pdf

75. I. E. Commission, «Automation systems in the process industry - Factory acceptance test (FAT), site acceptance test (SAT), and site integration test (SIT)». IEC, Geneva, Switzerland, 2012. .
76. A. R. Plummer, «Model-in-the-Loop Testing», *Proc. Inst. Mech. Eng. Part J. Syst. Control Eng.*, т. 220, вип. 3, С. 183—199, 2006, doi: 10.1243/09596518JSCE207.
77. W. Mahnke, S.-H. Leitner, i M. Damm, *OPC Unified Architecture*. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. doi: 10.1007/978-3-540-68899-0.
78. C. R. Harris, K. J. Millman, S. J. van der Walt, i others, «Array programming with NumPy», *Nature*, т. 585, вип. 7825, С. 357—362, 2020, doi: 10.1038/s41586-020-2649-2.
79. F. Pedregosa *та ін.*, «Scikit-learn: Machine learning in Python», *J. Mach. Learn. Res.*, т. 12, С. 2825—2830, 2011.
80. M. Bauer i I. K. Craig, «Economic assessment of advanced process control – A survey and framework», *J. Process Control*, т. 18, вип. 1, С. 2—18, 2008.

ДОДАТОК А

ПРИПУЩЕННЯ ТА ОБМЕЖЕННЯ ДОСЛІДЖЕННЯ

У дисертаційному дослідженні при синтезі та верифікації системи предиктивного керування К-МРС свідомо прийнято ряд припущень та обмежень. Їхнє запровадження зумовлене методологічною спрямованістю роботи — метою дослідження є розроблення та верифікація методології побудови К-МРС, а не промислове впровадження на конкретному об'єкті.

Кожне припущення є типовим для відповідного етапу розроблення систем розширеного керування (АРС) і визначає межі інтерпретації отриманих результатів. Зняття або послаблення цих припущень є предметом наступних етапів дослідження, для яких у роботі визначено відповідні технічні шляхи (стовпець «Шлях зняття» Таблиці А.1).

Нижче систематизовано 15 ідентифікованих припущень, згрупованих за тематикою: джерело та структура даних (П-1–П-3), архітектура моделі (П-4–П-8), верифікація та валідація (П-9–П-12), допоміжні (П-13–П-14). Для кожного припущення вказано зміст, обґрунтування та зв'язок із подальшими етапами дослідження.

А.1 Припущення щодо джерела та структури даних

П-1. Синтетичне джерело даних

Навчальна вибірка $D = \{(u_i, y_i)\}$, $i = 1, \dots, n$, $n = 500$ генерується верифікованим параметричним симулятором PlantDynamics за формулами (2.16)–(2.17), а не з промислового об'єкта. Обґрунтування: мета дослідження — синтез та верифікація методології К-МРС. Симулятор забезпечує контрольовану варіацію параметрів процесу, відтворюваність експериментів (seed (42), 30 незалежних запусків) та можливість ізольованого дослідження впливу окремих факторів (тип руди, рівень шуму, швидкість дрейфу). Такий підхід є типовим для першого етапу розроблення АРС-систем; водночас він визначає межі інтерпретації отриманих кількісних оцінок (RMSE, час відновлення), які потребують подальшої перевірки на промислових даних. Перехід до реальних промислових даних передбачено на фазі Offline-ідентифікації (§4.5.1) чотирифазного плану впровадження.

П-2. Квazистатична модель ідентифікації

KRR-модель $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ є статичною — алгебраїчне відображення вхід–вихід без явної динаміки стану. Динаміка процесу враховується опосередковано: через рецидивний горизонт MPC ($N_p = 10$ кроків = 10 хв) та компенсацію збурень через нев'язку $e(k) = y_{\text{meas}}(k) - \hat{y}(k|k-1)$ (§3.2.2). Обґрунтування: такт керування $T_s = 60$ с значно перевищує перехідні процеси всередині барабанного сепаратора ($\tau_{\text{бар}} \approx 5\text{--}10$ с), тому за один такт процес встигає досягти квазістаціонарного стану. Транспортне запізнення $\tau = 120\text{--}180$ с компенсується горизонтом прогнозу $N_p \geq (T+\tau)/T_s \approx 8$. Квазістатичний підхід є стандартним для APC-систем збагачення з великим тактом вимірювання.

П-3. Гаусівська модель шуму вимірювань

Шум вимірювань $\eta \sim N(0, \sigma_\eta^2 \cdot I_2)$ прийнято адитивним, гаусівським та некорельованим за часом і між каналами ($\sigma_\eta \approx 0.1$ у нормалізованих одиницях). Обґрунтування: характеристики відповідають паспортним даним XRF-аналізаторів ($\sigma_{\text{noise}}(\beta_{\text{Fe}}) = 1.5\%$, $\sigma_{\text{noise}}(\varepsilon) = 2.0\%$). Некорельованість каналів β_{Fe} та ε обумовлена використанням незалежних вимірювальних пристроїв. Робастність системи при відхиленнях від гаусівської моделі забезпечується GP-наглядачем (§2.4.5), який адаптує матрицю $R(k)$ при зростанні невизначеності.

A.2 Припущення щодо архітектури моделі

П-4. Декомпозиція виходів

Показники якості β_{Fe} та ε моделюються двома незалежними KRR-моделями (§2.2.1), без явного врахування кореляції між ними. Обґрунтування: обидва виходи визначаються одним і тим самим набором входів $u = (B, \rho, Q)$, тому кореляція між β_{Fe} та ε є наслідком спільних входів і відтворюється опосередковано через MPC-оптимізацію з ваговою матрицею $Q = \text{diag}(q_\beta, q_\varepsilon)$. Декомпозиція спрощує обчислення та дозволяє

незалежне оновлення моделей при адаптації (§2.4.4), що є важливою практичною перевагою.

П-5. Фіксований вектор входів $d = 3$

Вектор керування обмежений трьома змінними: $u = (B, \rho, Q)^T$. Додаткові фактори (крупність помелу, вміст Fe у живленні, температура пульпи тощо) не включені до вхідного вектора моделі. Обґрунтування: B, ρ та Q є трьома основними оперативно керованими параметрами барабанного сепаратора ПБМ-90/250. Інші фактори змінюються на масштабах часу від годин до діб і враховуються опосередковано через адаптивну архітектуру SVR+KRR+GP (§2.4). Розширення розмірності d є прямим масштабуванням методу: обчислювальна складність аналітичного градієнта $O(n \cdot d)$ залишається лінійною за d .

П-6. Спрощена модель-генератор

Формули моделі-генератора (2.16)–(2.17) є напівемпіричними: S-подібна залежність $\beta_{Fe}(B)$, експоненціальне насичення $\varepsilon(B)$. Повне першопринципне моделювання фізичного механізму актуації магнітної індукції B не виконувалось. Обґрунтування: KRR є data-driven методом, що не потребує першопринципної фізичної моделі. Модель-генератор забезпечує ключові типи нелінійних залежностей (S-подібна для $\beta_{Fe}(B)$, екстремальна для $\beta_{Fe}(\rho)$), характерні для реального процесу магнітної сепарації. Параметри генератора калібровані за галузевими даними ГЗК Кривбасу (§4.3.2): три профілі руди відповідають трьом реальним комбінатам.

П-7. Дискретна параметризація типів руди

Моделювано лише три профілі руди: М (магнетитова, ПівнГЗК), МХ (змішана, Інгулецький), Q (кварцитова, ПівдГЗК) з фіксованими параметрами $k, B_0, \beta_{\max}, \rho_{\text{opt}}$ (§4.3.2). Реальна варіабельність мінералогічного

складу є неперервною. Обґрунтування: три профілі охоплюють повний спектр типів руди Кривбасу. Неперервна варіабельність мінскладу моделюється через повільний дрейф параметрів між профілями (§4.4.2) та різку зміну типу руди (сценарій $M \rightarrow Q$, §3.4.3). Адаптивна архітектура SVR+KRR+GP автоматично відстежує ці зміни: $RMSE_{adapt} \approx 0.22$ при покращенні $15\text{--}36\times$ відносно статичної моделі.

П-8. Фіксований обсяг вибірки $n = 500$

Обсяг навчальної вибірки $n = 500$ та ковзного вікна $W = 500$ прийнятий без побудови кривих навчання або формального аналізу мінімально достатнього обсягу. Обґрунтування: при $W = 500$ та $T_s = 60$ с вікно покриває ≈ 8 годин — достатньо для охоплення одного повного циклу варіації мінскладу. Якість моделі підтверджена: $RMSE_{test} \approx (1.0\text{--}1.5) \cdot \sigma_\eta \approx 0.07\text{--}0.15$, що близько до теоретичної нижньої межі, обумовленої рівнем шуму. Обчислювальна складність $O(n^3)$ при $n = 500$ забезпечує час оновлення ≈ 46 мс $\ll T_s = 60$ с.

П-9. RBF як єдиний тип ядра

У дослідженні використовується виключно RBF-ядро $k(u, u') = \exp(-\|u - u'\|^2 / 2\sigma^2)$. Порівняння з іншими типами ядер (поліноміальне, Матерна, раціональне квадратичне тощо) не проводилось. Обґрунтування: RBF є єдиним серед стандартних ядер, що одночасно забезпечує позитивну визначеність на $\mathbb{R}^3$ (теорема Бохнера), клас гладкості C_∞ та замкнений аналітичний градієнт (формула 2.15), а також єдиний гіперпараметр σ , що має фізичну інтерпретацію («радіус чутливості»). Крім того, математична єдність архітектури потребує спільного ядра для SVR, KRR та GP.

А.3 Припущення щодо верифікації та валідації

П-10. Рівень верифікації — MiL

Уся верифікація системи K-MPC виконана на Python-прототипі PlantDynamics, що класифікується як Model-in-the-Loop (MiL) за стандартом IEC 62381. Верифікація на апаратному рівні (Hardware-in-the-Loop) та промислові випробування (FAT/SAT) не проводились. Обґрунтування: MiL є першим обов'язковим етапом V-подібної моделі верифікації за IEC 62381, який забезпечує підтвердження методологічної спроможності алгоритму та коректності його програмної реалізації. Колінеарність BNK (§3.6.1) забезпечує, що порівняння шести методів не спотворене артефактами різних моделей об'єкта в межах прийнятої моделі-генератора. Повна валідація системи на промисловому об'єкті потребує подальших етапів верифікації (HiL, FAT/SAT), передбачених чотирифазним планом впровадження (§4.5).

П-11. Самореферентність колінеарного BNK

Порівняльний аналіз шести методів керування (§3.6) виконується на тій самій PlantDynamics, що генерувала навчальні дані K-MPC. Систематичне зміщення моделі (model mismatch) відносно реального об'єкта не досліджується. Обґрунтування: колінеарний BNK цілеспрямовано ізолює вплив алгоритму керування від артефактів моделювання: усі шість методів працюють з ідентичним модельним об'єктом, що забезпечує методологічну коректність та відтворюваність порівняння в межах прийнятої моделі-генератора. Водночас отримані відносні переваги K-MPC потребують перевірки на промисловому об'єкті, де може проявитися систематичне зміщення моделі (model mismatch). Дослідження model mismatch є предметом фази Shadow Mode (§4.5.2), де K-MPC працює паралельно з реальним об'єктом без впливу на процес.

П-12. Числове обґрунтування термінального коефіцієнта

Коефіцієнт термінального стискання $\gamma = 0.85$ у достатніх умовах стійкості (§3.4.1) обґрунтований числовими оцінками для типових параметрів М-руди, а не строгим аналітичним доведенням для довільного початкового стану. Обґрунтування: значення $\gamma = 0.85$ перевірено на всіх трьох типах руди Кривбасу та всіх верифікаційних сценаріях S1–S3 (§3.6.3). Числова верифікація підтверджує практичну збіжність: $V(30)/V(0) \approx 0.819^{30} \approx 0.0015$. Результируюче $\lambda_{\max} \approx 0.819 < 1$ забезпечує запас стійкості $\approx 18\%$, що є достатнім для промислового застосування.

П-13. Детерміновані часові параметри

Такт керування $T_s = 60$ с (визначений циклом XRF-аналізатора) та транспортне запізнення $\tau = 120$ с (номінальне значення) прийняті фіксованими константами. Варіабельність часу аналізу та залежність τ від об'ємної витрати Q не моделюються. Обґрунтування: T_s визначається паспортною характеристикою XRF-аналізатора і є стабільним. Варіація τ у межах 120–180 с компенсується горизонтом прогнозу $N_p = 10 \geq (T + \tau)/T_s \approx 8$. Запас за часом обчислювального циклу End-to-End становить $T_s/t_{p95} \approx 60\,000/3.02 \approx 20\,000\times$, що робить систему нечутливою до помірних варіацій тактових параметрів.

А.4 Допоміжні припущення

П-14. Область прийнятності лінеаризації

KRR-модель лінеаризується навколо опорної траєкторії на кожному такті, перетворюючи задачу NLP на QP. Прийнятність лінеаризації обмежена умовою $\|\Delta u\|/\sigma \leq s_{\max}$. Обґрунтування: механізм самозабезпечення (НН-2) через штраф $R = R_0 = \text{diag}(1/\Delta u_{\max}^2)$ утримує робоче значення $\|\Delta u\|/\sigma \approx 0.08$, що значно менше граничного $s_{\max} \approx 0.38\text{--}0.47$ для різних типів руди. Відповідна похибка лінеаризації $e_{\text{lin}} \approx 0.1\text{--}0.3\% \ll \delta_{\max} = 5\%$. Кількісна перевірка виконана для всіх трьох типів руди Кривбасу (§3.1.2).

А.5 Зведена таблиця припущень

Таблиця А.1 — Зведений реєстр припущень дослідження

№	Припущення	Тип	Розділ	Шлях зняття
1	Синтетичне джерело даних	Дані	§2.2.3, §4.5.1	Промислові дані (фаза Offline, §4.5.1)
2	Квазістатична модель ідентифікації	Модель	§2.2.1, §3.2.2	Динамічна модель простору стану
3	Структура шуму вимірювань	Дані	§2.2.1, §2.4.5	Ідентифікація розподілу шуму на об'єкті
4	Декомпозиція виходів	Модель	§2.2.1	Мультивихідна KRR із спільним ядром
5	Фіксований вектор входів $d = 3$	Модель	§2.2.1, §2.4	Розширення d (масштабування $O(n \cdot d)$)
6	Спрощена модель-генератор	Модель	§2.2.3, §4.3.2	Калібрування за промисловими даними
7	Дискретна параметризація руди	Модель	§4.3.2, §4.4.2	Неперервна параметризація мінералу
8	Фіксований обсяг вибірки	Модель	§2.2.3, §2.4.4	Криві навчання; адаптивне $W(k)$
9	RBF як єдине ядро	Модель	§2.2.2, §2.4.2	Порівняння з ядрами Матерна, поліном.

10	Рівень верифікації — MiL	Верифікація	§4.1.2, §4.5	HiL, FAT/SAT (§4.5, фази 2–4)
11	Самореферентність BNK	Верифікація	§3.6.1, §4.5.2	Shadow Mode з реальним об'єктом (§4.5.2)
12	Термінальний член $\gamma = 0.85$	Верифікація	§3.4.1, §3.6.3	Строге доведення для класу Ляпунова
13	Детерміновані часові параметри	Верифікація	§4.1.1	Адаптивне T_s та $\tau(Q)$
14	Лінеаризація на кожному такті	Допоміжне	§2.3.2, §3.1.2	SQP-коректор при $R \rightarrow 0$

Наведені припущення є свідомими методологічними рішеннями, прийнятими на етапі розроблення та верифікації K-MPC. Кожне з них визначає межі інтерпретації відповідних результатів дослідження та одночасно — шлях зняття обмеження на наступних етапах (стовпець «Шлях зняття» Таблиці А.1): від промислової параметризації (фаза Offline) до повноцінних приймальних випробувань (FAT/SAT). Сукупність припущень не заперечує методологічної цінності запропонованого підходу та забезпечила можливість зосередити дослідження на центральному науковому питанні — синтезі й обґрунтуванні методології K-MPC на основі аналітичного градієнта ядерної функції; кількісна верифікація результатів на промисловому об'єкті є предметом подальших досліджень.

ДОДАТОК Б

СПИСОК ПУБЛІКАЦІЙ ЗДОБУВАЧА ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

Наукові праці, в яких опубліковано основні наукові результати дисертації

Статті у наукових виданнях, що входять до міжнародних наукометричних баз даних (Scopus):

1. Volovetskyi O. O. Utilizing Gaussian Process Regression for Nonlinear Magnetic Separation Process Identification. *Informatyka, Automatyka, Pomiaru w Gospodarce i Ochronie Środowiska (IAPGOS)*. 2024. Vol. 14, No. 3. P. 21–28. DOI: 10.35784/iapgos.5954. (Scopus)

2. Volovetskyi O. O. Methods of Filtering and Regression for Forecasting Noisy Timeseries Based on Machine Learning. *Herald of Advanced Information Technology*. 2025. Vol. 8, No. 1. P. 13–27. DOI: 10.15276/hait.08.2025.1. (Scopus)

Статті у наукових фахових виданнях України:

3. Volovetskyi O. Comprehensive methodology for creating enhanced datasets for modelling the process of magnetic separation of iron ore. *Journal of Kryvyi Rih National University*. 2024. Vol. 22, No. 2. P. 10–27. DOI: 10.31721/2306-5451-2024-2-22-10-27.

4. Volovetskyi O. O. Development and Research of a Synthetic Data Generator for Modeling Technological Parameters of the Iron Ore Beneficiation Process. *Вчені записки Таврійського національного університету імені В. І. Вернадського. Серія: Технічні науки*. 2025. Т. 36, № 2. С. 49–54. DOI: 10.32782/2663-5941/2025.2.2/07.

5. Volovetskyi O. Local Linearization of Kernel Models in Real Time as a Basis for Fast Optimization in MPC. *Automation of Technological and Business Processes*. 2025. Vol. 17, No. 4. P. 98–103. DOI: 10.15673/atbp.v17i4.3319.

Наукові праці, які засвідчують апробацію матеріалів дисертації

Тези доповідей на наукових конференціях:

6. Воловецький О. О. Використання ядерних методів при керуванні процесами збагачення. Розвиток промисловості та суспільства: матеріали міжнародної науково-технічної конференції (м. Кривий Ріг, 2023). Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2023. С. 231.

7. Воловецький О. О., Тронь В. В. Предиктивне керування з урахуванням нелінійності в збагаченні руд. Комп'ютерні інтелектуальні системи та мережі: матеріали XVII Всеукраїнської науково-практичної WEB-конференції аспірантів, студентів та молодих вчених (м. Кривий Ріг, 2024). Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2024. С. 240–242.

8. Воловецький О. О., Тронь В. В. Вибір методу регресії для моделювання динамічних систем: SVR vs GPR. XIV Всеукраїнська конференція «Молоді вчені 2024 – від теорії до практики» (м. Дніпро, 2024). Дніпро: Інститут промислових та бізнес-технологій УДУНТ, 2024. С. 135–141.

9. Воловецький О. Адаптивний метод фільтрації зашумлених даних у системах магнітної сепарації з використанням логарифмічної залежності ширини вікна. Збірник тез доповідей Всеукраїнської науково-практичної on-line конференції «Проблеми енергоефективності та автоматизації в промисловості та сільському господарстві» (м. Кропивницький, 2024). Кропивницький: Центральнуукраїнський національний технічний університет, 2024. С. 191–193.

10. Воловецький О. О., Тронь В. В. Оптимізація алгоритмів SVR для швидкого прогнозування параметрів збагачення залізної руди з використанням обмеженого обсягу даних. Комп'ютерні інтелектуальні системи та мережі: матеріали XVIII Всеукраїнської науково-практичної WEB-конференції аспірантів, студентів та молодих вчених (м. Кривий Ріг,

2025). Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2025. С. 286–289.

11. Воловецький О. О. Ефективність ядерного предиктивного керування процесом збагачення залізних руд: порівняльний аналіз. Development of Education, Science and Business: Results 2025: Proceedings of the International Scientific and Practical Internet Conference (Dnipro, Ukraine, 2025). Dnipro: FOP Marenichenko V. V., 2025. P. 153–154.

12. Воловецький О. О. Стабільність та робастність ядерного предиктивного керування процесом магнітної сепарації. Матеріали XVIII міжнародної науково-практичної конференції «Інформаційні технології і автоматизація – 2025» (м. Одеса, 2025). Одеса, 2025. С. 384–387.

13. Воловецький О. О. Процес переходу від статичної до динамічної системи магнітної сепарації. Розвиток промисловості та суспільства: матеріали міжнародної науково-технічної конференції (м. Кривий Ріг, 2025). Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2025. С. 336.

14. Воловецький О. О., Тронь В. В. Реалізація швидкого предиктивного керування (К-MPC) для складних промислових об'єктів в умовах цифрової трансформації. Виклики майбутнього: трансформації, стратегії адаптації та стійкість у міждисциплінарному вимірі: збірник тез Всеукраїнської науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти та молодих вчених (м. Чернігів, 2025). Чернігів: ЗВО «Університет трансформації майбутнього», 2025. С. 199–201.

15. Volovetskyi O. Kernel-Based Predictive Control of Nonlinear Magnetic Separation Processes. Матеріали конференцій МЦНД (м. Суми, 2025). Суми: МЦНД, 2025. С. 212–217. DOI: 10.62731/mcnd-10.10.2025.002.

16. Воловецький О. О., Тронь В. В. Діагностика числової деградації Kernel-MPC при збільшенні горизонту прогнозування. Комп'ютерні інтелектуальні системи та мережі: матеріали XIX Всеукраїнської науково-

практичної WEB-конференції аспірантів, студентів та молодих вчених (м. Кривий Ріг, 2026). Кривий Ріг: Криворізький національний університет, 2026. С. 306–308.

17. Воловецький О. О., Тронь В. В. Критерій вибору ядерної моделі для прогнозуючого керування на основі властивостей аналітичного градієнта. XVI Всеукраїнська конференція «Молоді вчені 2026 – від теорії до практики» (м. Дніпро, 2026). Дніпро: УДУНТ, ННІ Дніпровський металургійний інститут, 2026. С. 353–358.

18. Воловецький О. О., Тронь В. В. Протокольна модель забезпечення відтворюваності досліджень автоматизованих систем керування технологічними процесами. Інформаційні технології: теорія і практика: матеріали III (IX) Міжнародної науково-практичної конференції здобувачів вищої освіти і молодих учених (Харків–Запоріжжя–Дніпро, 25–27 березня 2026 р.). Дніпро: Свідлер А. Л., 2026. С. 588–591.

ДОДАТОК В

ВИХІДНІ ДАНІ ДЛЯ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ МАГНІТНОЇ СЕПАРАЦІЇ

Цей додаток містить повний перелік параметрів, прийнятих для моделювання процесу магнітної сепарації на барабанному сепараторі ПБМ-90/250, що є основою верифікаційного симулятора PlantDynamics. Параметри використовуються в усіх розрахунках, наведених у розділах 1–5 дисертації (посилання на цей додаток наведено в основному тексті роботи). Джерелом параметрів є паспортні дані обладнання гірничо-збагачувальних комбінатів (ГЗК) Криворізького басейну, технологічні регламенти, результати авторських досліджень та експертні оцінки. Параметри, запозичені з літературних джерел, позначені відповідними посиланнями на загальний список джерел дисертації.

В.1. Керуючі змінні процесу магнітної сепарації

Таблиця В.1 Діапазони та обмеження керуючих змінних сепаратора ПБМ-90/250

Параметр	Позначення	Значення / діапазон	Обґрунтування
Магнітна індукція	В	[0,08; 0,18] Тл	Паспортний діапазон ПБМ-90/250
Обмеження приросту В	$ \Delta B $	$\leq 0,005$ Тл/крок	Технологічний регламент: запобігання динамічним ударам

Параметр	Позначення	Значення / діапазон	Обґрунтування
Густина пульпи	ρ	[1200; 1600] кг/м ³	Фізично обґрунтований діапазон для водно- рудних суспензій Кривбасу
Обмеження приросту ρ	$ \Delta\rho $	≤ 20 кг/м ³ /крок	Обмеження швидкості зміни подачі реагентів
Об'ємна витрата пульпи	Q	[200; 600] м ³ /год	Діапазон продуктивності секції
Обмеження приросту Q	$ \Delta Q $	≤ 50 м ³ /год/крок	Апаратне обмеження швидкості зміни насосів

В.2. Вихідні змінні та параметри вимірювань

Таблиця В.2 Вихідні змінні та характеристики вимірювальних каналів

Параметр	Позначення	Значення / діапазон	Обґрунтування
Вміст заліза у концентраті	βFe	[60; 72] %	Регламентний мінімум $\beta\text{Fe}_{\min} = 65$ %
Коефіцієнт вилучення	ϵ	[55; 95] %	Характеризує повноту вилучення заліза

Параметр	Позначення	Значення / діапазон	Обґрунтування
Похибка вимірювання βFe	$\sigma_{\text{шум}}(\beta\text{Fe})$	1,5 %	Типовий XRF-аналізатор ГЗК Кривбасу
Похибка вимірювання ε	$\sigma_{\text{шум}}(\varepsilon)$	2,0 %	Розрахункове значення (похибки витрат та масових балансів)
Затримка вимірювання βFe	τ_{XRF}	2–3 кроки (120–180 с)	Затримка аналізу XRF-аналізатора
Рівень шуму (нормалізований)	σ_{η}	$\approx 0,1$ н.о.	У нормалізованому масштабі z-score

В.3. Динамічні параметри об'єкта керування

Таблиця В.3 Параметри динаміки процесу магнітної сепарації

Параметр	Позначення	Значення	Обґрунтування
Такт дискретизації	T_s	60 с	Період отримання даних від XRF-аналізатора
Транспортне запізнення	τ	120–180 с (2–3 кроки)	Час проходження пульпи від точки регулювання до точки аналізу
Постійна часу об'єкта	T	300–600 с (5–10 кроків)	Інерційність процесу; обґрунтовує $N_p \geq 10$

Параметр	Позначення	Значення	Обґрунтування
Кількість змінних стану	$\dim(x)$	8	Вектор стану $x(k) \in \mathbb{R}^8$
Метод інтегрування	—	Рунге-Кутта 4-го порядку (RK4)	Точність інтегрування не є джерелом похибки
Характеристика $\beta_{Fe}(B)$	—	S-подібна (сигмоїдна)	$\beta_{Fe} = \beta_{\max} / (1 + \exp(-k(B - B_0)))$
Характеристика $\varepsilon(B)$	—	Монотонне насичення	$\varepsilon \propto (1 - \exp(-c_2 \cdot B))$; перехресні зв'язки: $\partial \beta_{Fe} / \partial \rho \neq 0, \partial \varepsilon / \partial Q \neq 0$

В.4. Параметризація за типами руд Кривбасу

Модель підтримує три профілі руди, що відрізняються коефіцієнтами нелінійних залежностей. Параметри S-кривої та оптимальна густина пульпи є авторськими значеннями, отриманими на основі промислових даних п'яти ГЗК Кривбасу. Числові значення параметрів k , B_0 , $\beta_{\max}$ визначаються калібруванням на конкретному підприємстві.

Таблиця В.4 Параметри профілів руд для моделі PlantDynamics

Параметр	Тип М (магнетит)	Тип МХ (змішана)	Тип Q (кварцит)
Оптимальна густина пульпи ρ_{opt} , кг/м ³	≈ 1350	≈ 1400	≈ 1450
Параметр крутизни S-кривої k	25–30 (кном = 27,5)	20–25 (кном = 22,5)	15–20 (кном = 17,5)

Параметр	Тип М (магнетит)	Тип МХ (змішана)	Тип Q (кварцит)
Точка перегину S- кривої B_0 , Тл	0,10–0,12 ($B_{0,ном}$ = 0,110)	0,12–0,14 ($B_{0,ном}$ = 0,130)	0,14–0,16 ($B_{0,ном}$ = 0,150)
Максимальне збагачення β_{max} , %	68–70	66–68	63–65
Параметр кривизни C_{curv}	0,45	0,55	0,70
ГЗК-прив'язка	Північний, Центральний	Інгулецький	Південний, Полтавський

В.5. Параметри моделі нестационарності

В.5.1. Тип I – повільний дрейф

Таблиця В.5 Параметри повільного концептуального дрейфу

Параметр	Значення / діапазон	Обґрунтування
Часовий масштаб дрейфу	400–600 кроків (6,7–10 год)	Варіація мінералогічного складу, знос барабана
Амплітуда дрейфу β_{Fe}	$\pm(3-5)$ % від номіналу	Достатня для деградації статичної KRR
Амплітуда дрейфу ϵ	$\pm(5-8)$ % від номіналу	ϵ чутливіший до змін складу
Знос барабана	0,1–0,5 % деградації β_{max} / 1000 кроків	Поступова деградація магнітної системи
Профіль дрейфу	Лінійний або ступінчастий	Лінійний – для дрейфу типу I; ступінчастий –

Параметр	Значення / діапазон	Обґрунтування
		для тесту швидкої адаптації

В.5.2. Тип II – аномальні виміри

Таблиця В.6 Параметри моделі аномальних вимірювань

Тип аномалії	Модель	Параметри
Тип А: раптові викиди (spikes)	$y_{\text{аном}} = y + N(0, k \cdot \sigma_{\text{шум}})$	$k \in [3; 6]$
Тип Б: залипання сенсора (stuck)	$y(k) = y(k-1)$ протягом N кроків	$N \in [3; 10]$
Тип В: дрейф калібрування	$y(k) += \text{drift}_{\text{rate}} \cdot (k - k_{\text{start}})$	$\text{drift}_{\text{rate}} \in [0,01; 0,05]$ %/крок
Базовий тест SVR-фільтра	50 аномалій типу А за 240 кроків	$\text{Precision} \geq 0,85; \text{Recall} \geq 0,80$

В.5.3. Шуми та збурення процесу

Таблиця В.7 Параметри шумів вимірювань та збурень процесу

Параметр	Модель / значення	Обґрунтування
Шум βFe	AWGN: $\eta_1 \sim N(0, \sigma_1^2)$, $\sigma_1 = 1,5 \%$	Базове значення для сценарію S1
Шум ε	AWGN: $\eta_2 \sim N(0, \sigma_2^2)$, $\sigma_2 = 2,0 \%$	Розрахункове значення
Кореляція шумів	$\text{corr}(\eta_1, \eta_2) = 0$	Незалежність для декомпозиції $f \rightarrow (f_1, f_2)$
Варіація температури пульпи	$\pm 10 \text{ }^\circ\text{C}$ відносно $20 \text{ }^\circ\text{C}$	Вплив на в'язкість та βFe

Параметр	Модель / значення	Обґрунтування
Варіація твердості руди	$\pm 20\%$ від номіналу	Вплив на крупність помелу
Крок-збурення витрати	$\Delta Q_{\text{ext}} = \pm(50-100) \text{ м}^3/\text{год}$	Сценарій S3: компенсація зовнішнього збурення

В.6. Параметри ядерної моделі ідентифікації (KRR)

Таблиця В.8 Параметри KRR-моделі з RBF-ядром

Параметр	Позначення	Значення / діапазон	Обґрунтування
Ядерна функція	$k(u, u')$	RBF: $\exp(-\ u-u'\ ^2 / 2\sigma^2)$	Єдине ядро, що задовольняє критерій R4
Декомпозиція виходів	—	Дві незалежні KRR: $f_1(\beta\text{Fe})$, $f_2(\varepsilon)$	Відповідає МІМО-декомпозиції об'єкта
Нормалізація входів	—	z-score: $u_n = (u - \mu) / \sigma_{\text{std}}$	Рівноправний внесок компонент у матрицю Грама
Обсяг навчальної вибірки	n	500 (рекомендовано 300–800)	Достатньо для стабільної інверсії K
Розбивка train/test	—	80 % / 20 % (400 / 100)	Фіксований seed для відтворюваності
Крос-валідація	—	Time-series split, k = 5	Збереження хронологічної структури даних

Параметр	Позначення	Значення / діапазон	Обґрунтування
Сітка пошуку σ	σ	[0,1; 5,0], log-scale, 10–20 точок	Конфігурується у JSON-файлі параметрів
Сітка пошуку λ	λ	[10 ⁻⁴ ; 1,0], log-scale, 10–20 точок	Бюджет 100–400 комбінацій
LOO-CV	—	Аналітична формула hat-matrix	Без повторної інверсії матриці Грама
Апріорна оцінка λ	$\lambda \approx \sigma^2 \eta / \sigma^2 y$	$\approx 0,01$	Початкове наближення для сіткового пошуку
Критерій якості (перехід до Shadow Mode)	RMSE	< 0,8 % (βFe); < 1,5 % (ε)	Критерій готовності до етапу Shadow Mode

В.7. Параметри алгоритму K-MPC

Таблиця В.9 Параметри постановки задачі предиктивного керування

Параметр	Позначення	Значення	Обґрунтування
Горизонт прогнозу	N_p	10 (номінал); {5, 10, 15, 20}	$N_p \geq T/T_s = 8$; прийнято із запасом
Горизонт керування	N_c	3 (номінал); {2, 3, 5}	$N_c \ll N_p$; 29 змінних, 56 нерівностей
Матриця Q (виходи)	Q	diag(1/ Δy^2 max)	Inverse-range scaling

Параметр	Позначення	Значення	Обґрунтування
Матриця R (прирости)	R_0	$\text{diag}(1/\Delta u^2 \max)$	Технологічне нормування + самозабезпечення лінеаризації
Співвідношення штрафів	$\rho\beta / q\beta$	100	Порушення обмеження штрафується у $100\times$ сильніше
М'які обмеження	$\xi \geq 0$	Slack-змінні з квадратичним штрафом	Гарантія розв'язності QP
QP-рішувач (основний)	—	OSQP (ADMM)	Детермінований час розв'язання
QP-рішувач (запасний)	—	SLSQP (SciPy)	Резервування
Теплий старт	—	Зсув оптимальної послідовності на 1 крок	1–5 ітерацій замість повного перебору
Компенсація зміщення	—	Нев'язка $e(k) =$ $u_{\text{meas}} - \hat{y}$	Offset-free без явного спостерігача

В.8. Параметри адаптивної системи ідентифікації

В.8.1. Рівень 1 – SVR-фільтр аномалій

Таблиця В.10 Параметри SVR-фільтра

Параметр	Значення / вимога	Обґрунтування
Модель	SVR з RBF-ядром, ε -нечутлива зона	Природний детектор аномалій
Поріг ε SVR	Визначається крос-валідацією ($\kappa = 2,5 \cdot \sigma_{\text{шум}}$)	Адаптивний поріг, не фіксований відсоток
Правило детекції	$\ y(k) - f_{\text{SVR}}(u(k))\ > \varepsilon_{\text{SVR}} \rightarrow \text{аномалія}$	Виключення точки з навчального буфера KRR
Окремі SVR	Для βF_e та ε незалежно	Відповідає декомпозиції виходів

В.8.2. Рівень 2 – KRR з ковзним вікном

Таблиця В.11 Параметри ковзного вікна

Параметр	Позначення	Значення	Обґрунтування
Розмір ковзного вікна	W	500 (оптимум 300–600)	≈ 8 год роботи сепаратора при $T_s = 60$ с
Критерій послідовних аномалій	N_{jump}	3–5 тактів	Розрізнення стрибка від поодинокі аномалії
Складність оновлення	–	$O(W^3)$	Прийнятно при $W \leq 600$

Параметр	Позначення	Значення	Обґрунтування
Час інкрементного оновлення	—	≈ 46 мс ($W = 500$)	$\ll T_s = 60$ с
Час batch-навчання	—	≈ 232 мс ($W = 500$)	$\ll T_s = 60$ с

В.8.3. Рівень 3 – GP-наглядач невизначеності

Таблиця В.12 Параметри GP-наглядача

Параметр	Значення / вираз	Обґрунтування
Обчислення $\sigma^2\text{GP}$	$\sigma^2\text{GP}(u^*) = k(u^*, u^*) - k(u^*)^T \cdot (K + \lambda I)^{-1} \cdot k(u^*)$	Через матрицю Грама KRR без додаткової інверсії
Поріг θ_1 (штатний режим)	$\theta_1 = c_1 \cdot \lambda^*$ ($c_1 = 1,0$): M: 0,040; MX: 0,075; Q: 0,110	На рівні λ^* – поріг прогнозованої невизначеності
Поріг θ_2 (консервативний)	$\theta_2 = 3 \cdot \theta_1$: M: 0,120; MX: 0,225; Q: 0,330	На межі домену $\sigma^2\text{GP}$ зростає в $\geq 3\times$
Адаптивна матриця $R(k)$	$R(k) = R_0 + \alpha \cdot \sigma^2\text{GP} \cdot I$	При $\sigma^2\text{GP} = \theta_2$: подвоюється ефективний R
Гістерезис повернення	$\sigma^2\text{GP} < \theta_1$ протягом $N_{\text{hysteresis}}$ кроків	Уникнення коливань на межі порогу ($N_{\text{hysteresis}} = 3-5$)

В.9. Сценарії верифікації (BNK)

Таблиця В.13 Параметри тест-сценаріїв верифікації К-MPC

Сценарій	Тривалість	Умови	Метрика	Примітка
S1	240 кроків (4 год)	$\sigma_{\text{шум}} = 1,5$ %; без дрейфу	RMSE(βFe), RMSE(ε)	Стабілізація при шумі
S2	180 кроків	βFe : 65→68→65 %; без дрейфу	Перерегулювання, час виходу	Зміна уставки
S3	180 кроків	$Q \rightarrow Q+100$ м³/год на кроці 60	Час та амплітуда відхилення	Компенсація збурення
S4	480 кроків (8 год)	Лінійний дрейф типу I	RMSE: статична vs адаптивна KRR	Повільний дрейф
S5	240 кроків	50 аномалій типу A	Precision / Recall SVR-фільтра	Аномалії сенсорів

Таблиця В.14 Методи порівняльного аналізу (BNK)

Метод	Модель / алгоритм	Призначення у BNK
PID	Два незалежних PI-контролери	Базовий рівень (Level 1)
Adaptive PID	PID з онлайн-підстройкою параметрів	Обмеження однорівневої адаптації
LMPC	MPC з лінеаризованою моделлю в робочій точці	Прямий конкурент К- MPC
NMPC	MPC з повним NLP-рішувачем	Обчислювальні витрати NLP vs QP

Метод	Модель / алгоритм	Призначення у BNK
Neural MPC	MPC з MLP та числовим градієнтом	Обмеження R3 та R4
K-MPC	Повна реалізація (KRR + QP + адаптація)	Основний метод

В.10. Контрольні числові показники (критерії pass/fail)

Значення є критеріями прийнятності результатів симулятора. Кожний метод BNK виконується 30 незалежних запусків з різними seeds; метрики обчислюються як медіана та IQR.

Таблиця В.15 Контрольні показники верифікації

Показник	Критерій	Обґрунтування
RMSE KRR для βFe (тестова вибірка)	$< 0,8 \%$ (ідеально $< 0,5 \%$)	Критерій готовності до Shadow Mode
RMSE KRR для ε (тестова вибірка)	$< 1,5 \%$	Розрахункове значення
Похибка аналітичного градієнта	$< 10^{-6}$	Верифікація формули аналітичного градієнта
Деградація RMSE при $\sigma/\sigma^* = \pm 30 \%$	$\leq 0,22$ п.п.	Робастність до варіації гіперпараметрів
$\lambda_{\max}$ матриці переходу Ляпунова	< 1 (ідеально $\approx 0,82$)	Обґрунтування стійкості K-MPC
Час end-to-end одного такту (p95)	< 4 мс	Запас відносно $T_s = 60$ с; фактичний результат: $p95 \approx 3,02$ мс
Precision SVR-фільтра (тип А)	$\geq 0,85$	Валідація детектора аномалій

Показник	Критерій	Обґрунтування
К-MPC перерегулювання (S2)	$\approx 0 \%$	Якість перехідного процесу
К-MPC vs PID: покращення RMSE (S1)	$\geq 1,5\times$ (ідеально $\sim 2\times$)	Перевага предиктивного підходу

В.11. Обчислювальний бюджет одного такту К-MPC

Таблиця В.16 Бюджет обчислювального часу одного такту К-MPC

Етап	Час (p95)	Обґрунтування
Lifting + обчислення якобіанів ($N_p = 10$)	$\leq 1,5$ мс	$O(N_p \cdot n \cdot d)$ для $n = 500$, $d = 3$
Формування QP-задачі (H , f , A)	$\leq 0,1$ мс	Побудова матриць
Розв'язання QP (OSQP, warm start)	$\leq 1,5$ мс	29 змінних, 56 нерівностей
End-to-end одного такту (p95, фактичний)	$\approx 3,02$ мс	Запас $> 20\,000\times$ відносно $T_s = 60$ с
Критерій pass/fail (p95)	< 4 мс	Уточнений критерій за результатами верифікації
Пікова пам'ять ($n =$ 500, включно з K)	≈ 2 МБ	$K: 500 \times 500 \times 8 = 2$ МБ; робочі змінні: ≈ 43 КБ

В.12. Програмне забезпечення та конфігурація симулятора

Таблиця В.17 Стек програмного забезпечення симулятора PlantDynamics

Компонент	Версія / інструмент	Призначення
Мова реалізації	Python 3.11+	Основна мова
Матричні обчислення	NumPy	Формування та інверсія матриці Грама
Числове інтегрування	SciPy (scipy.integrate)	RK4 у PlantDynamics
Ядерна регресія	scikit-learn (KRR, SVR)	KRR та SVR з RBF-ядром
QP-рішувач	OSQP	Розв'язання QP-задачі
Конфігурація	JSON (scenario_config.json)	Усі числові параметри поза кодом
Логування	CSV	Кожен крок: t , $u(k)$, $y(k)$, $\hat{y}(k)$, σ^2_{GP}
Фіксований seed	np.random.seed(42)	Відтворюваність 30 запусків BNK

ДОДАТОК Г

ЗАТВЕРДЖУЮ
 Перший проректор Криворізького
 національного університету
 Владислав ЧУБАРОВ
 «28» 05 2026 р.



В

ДОВІДКА

про використання результатів дисертаційної роботи

Воловецького Олександра Остаповича

«Прогнозуюче керування нелінійним процесом магнітної сепарації
 на основі ядерних функцій» в навчальному процесі Криворізького
 національного університету

м. Кривий Ріг

Ми, що нижче підписались, декан факультету інформаційних технологій, канд. техн. наук, доцент Музика І.О. завідувач навчально-методичного відділу Івашура С.Л., зав. кафедри автоматизації, комп'ютерних наук і технологій канд. техн. наук, доцент Рубан С.А., склали цю довідку про те, що в навчальному процесі Криворізького національного університету для студентів спеціальності G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка» використовуються результати дисертаційної роботи аспіранта Воловецького О. О. «Прогнозуюче

керування нелінійним процесом магнітної сепарації на основі ядерних функцій» (зокрема, на прикладі процесу магнітної сепарації залізорудної сировини), використанні RBF-мереж і ядерних моделей для прогнозування технологічних показників, методика вибору ширини ядра та оцінювання точності моделей.

Вищезазначені матеріали знайшли відображення в окремих темах лекційного курсу, а також використовуються при проведенні лабораторних занять з дисципліни другого (освітньо-наукового) рівня вищої освіти «Інтелектуальні системи керування» ОПП «Автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології» спеціальності G7 «Автоматизація, комп'ютерно-інтегровані технології та робототехніка».

Декан ФІТ

Завідувач НМВ

Завідувач кафедри АКНТ



Іван МУЗИКА

Світлана ІВАШУРА

Сергій РУБАН

ДОДАТОК Д

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи
Криворізького національного
університету



Дмитро БРОВКО

» 04 2026 р.

**МЕТОДИКА ПОБУДОВИ НЕЛІНІЙНОЇ
ПРОГНОЗНОЇ МОДЕЛІ
ПРОЦЕСУ МАГНІТНОЇ СЕПАРАЦІЇ
НА ОСНОВІ ЯДЕРНОЇ
РЕГРЕСІЇ З АНАЛІТИЧНО ОБЧИСЛЮВАНИМ ГРАДІЄНТОМ**

МЕТОДИКА ПОБУДОВИ НЕЛІНІЙНОЇ ПРОГНОЗНОЇ МОДЕЛІ ПРОЦЕСУ МАГНІТНОЇ СЕПАРАЦІЇ НА ОСНОВІ ЯДЕРНОЇ РЕГРЕСІЇ З АНАЛІТИЧНО ОБЧИСЛЮВАНИМ ГРАДІЄНТОМ

Перелік умовних позначень

- B, ρ, Q — індукція магнітного поля, густина пульпи, продуктивність (керуючі змінні);
- β_{Fe}, ε — вміст заліза та коефіцієнт вилучення у концентрат (контрольовані показники);
- $u = (B, \rho, Q)^T$ — вектор входів; $y = (\beta_{Fe}, \varepsilon)^T$ — вектор виходів;
- KRR — ядерна гребенева регресія (kernel ridge regression);
- RBF — радіально-базисна (гаусова) ядерна функція;
- RKHS — гільбертів простір з відтворювальним ядром;
- $k(u, u')$ — ядерна функція; K — матриця Грама; α — вектор коефіцієнтів моделі;
- σ — ширина ядра; λ — параметр регуляризації; n — обсяг навчальної вибірки;
- MPC — предиктивне керування; QP — задача квадратичного програмування;
- LOO — перехресна перевірка з виключенням по одному (leave-one-out).

Вступ

Ефективне предиктивне керування процесом магнітної сепарації залізорудної сировини вимагає прогнозної моделі об'єкта, яка одночасно задовольняє чотири практичні вимоги: відтворює суттєво нелінійні залежності показників сепарації від керуючих впливів; забезпечує

обчислення прогнозу в реальному масштабі часу; зберігає інтерпретованість параметрів для верифікації технологічним персоналом; та надає замкнений аналітично обчислюваний градієнт за входами. Остання вимога є ключовою, оскільки саме наявність аналітичного градієнта дозволяє звести нелінійну задачу оптимального керування до задачі квадратичного програмування з єдиним глобальним мінімумом.

Методика встановлює порядок побудови такої моделі на основі ядерної гребеневої регресії з радіально-базисним ядром і призначена для застосування у системах автоматизованого керування барабанними магнітними сепараторами в умовах гірничо-збагачувальних комбінатів.

1. Призначення та сфера застосування

Методика визначає послідовність дій з ідентифікації статичної багатовимірної моделі $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, що відображає керуючі змінні (B, ρ, Q) у показники якості сепарації (β_{Fe}, ϵ). Методика застосовна до барабанних магнітних сепараторів типу ПБМ.

Автоматично керованими каналами є густина пульпи ρ (клапан подачі води) та продуктивність Q (насос). Магнітна індукція B на сепараторах із постійними магнітами є квазістатичним параметром, що встановлюється вручну поворотним пристроєм; по каналу B система формує лише дорадчу рекомендацію оператору, а не автоматичний керуючий вплив. Трьохканальний формалізм (B, ρ, Q) у моделі збережено для повноти опису об'єкта.

Результатом застосування методики є навчена модель, придатна для безпосереднього вбудовування у контур предиктивного керування завдяки наявності замкненого аналітичного градієнта.

2. Критерії придатності прогновної моделі

Модель вважається придатною для предиктивного керування за одночасного виконання чотирьох критеріїв:

- R1 — нелінійна адекватність: відтворення S-подібної залежності $\beta_{Fe}(B)$ та екстремальної залежності $\beta_{Fe}(\rho)$ у повному робочому діапазоні з похибкою, не більшою за допустиму; похибка лінійної моделі у тому ж діапазоні сягає 12–18 %;
- R2 — обчислювальна ефективність: складність обчислення прогнозу $O(n)$, що забезпечує 200–1000 викликів моделі за такт керування;
- R3 — інтерпретованість: відповідність параметрів моделі фізичним характеристикам процесу, що уможливорює часткову верифікацію персоналом;
- R4 — наявність замкненого аналітично обчислюваного градієнта $\partial f / \partial u$ для перетворення нелінійної задачі керування у задачу квадратичного програмування.

Порівняльний аналіз класів моделей за критеріями R1–R4 наведено у таблиці 1.

Таблиця 1 — Відповідність класів моделей критеріям R1–R4

Клас моделі	R1	R2	R3	R4
Багатошаровий персептрон	так	так	ні	частково
Гаусів процес	так	ні	так	частково
Опорних векторів (SVR)	так	частково	частково	частково
Ядерна гребенева регресія	так	так	так	так

Єдиним класом, що задовольняє всі чотири критерії одночасно, є ядерна гребенева регресія на радіально-базисному ядрі.

3. Формування навчальної вибірки

Навчальну вибірку $D = \{(u_i, y_i)\}$ формують у межах паспортних діапазонів об'єкта, що забезпечує покриття всього технологічного домену й переводить будь-який робочий режим у режим інтерполяції, а не екстраполяції. Рекомендований обсяг вибірки — $n = 500$. Змінні нормують за z -перетворенням. Розбивку виконують у співвідношенні 80/20 (навчання/тестування). Орієнтовний рівень нормованого шуму вимірювань $\sigma_\eta \approx 0,1$.

4. Побудова моделі ядерної гребеневої регресії

За теоремою про представлення розв'язок у гільбертовому просторі з відтворювальним ядром подається у вигляді:

$$f * (u) = \sum \alpha_i \cdot k(u_i, u), \quad (1)$$

де коефіцієнти моделі визначаються замкненим розв'язком:

$$\alpha * = (K + \lambda \cdot I_n)^{-1} \cdot y. \quad (2)$$

Ядерну функцію приймають радіально-базисною:

$$k(u, u') = \exp(-\|u - u'\|^2 / 2\sigma^2). \quad (3)$$

Навчання моделі (формування коефіцієнтів α) має складність $O(n^3)$ і виконується одноразово або при оновленні вибірки; обчислення прогнозу має складність $O(n)$ і виконується на кожному такті, що відповідає критерію R2. Радіально-базисне ядро є позитивно визначеним при $\sigma > 0$, чим гарантується невиродженість матриці $(K + \lambda I)$ і коректність розв'язку (2).

Дві компоненти виходу (β_{Fe} та ε) ідентифікують як дві незалежні моделі зі спільною матрицею Грама K , що дозволяє повторно використовувати одну факторизацію.

5. Аналітичний градієнт моделі

Завдяки нескінченній гладкості радіально-базисного ядра градієнт прогнозу за входами виражається у замкненій формі:

$$\partial f^*/\partial u = -(1/\sigma^2) \cdot \sum \alpha_i \cdot k(u_i, u) \cdot (u - u_i). \quad (4)$$

Градієнт (4) обчислюється за один прохід по навчальній вибірці зі складністю $O(n \cdot d)$. Числовий метод скінченних різниць потребує $2d$ незалежних викликів моделі, тому відношення часу обчислення складає:

$$t_{\text{числ}}/t_{\text{аналіт}} = 2d = 6(\text{при } d = 3). \quad (5)$$

Аналітичний градієнт забезпечує точну побудову матриці предикції та строгу опуклість задачі квадратичного програмування: гессіан $H = \Theta^T Q \Theta + R$ задовольняє нерівність $H \geq R > 0$ незалежно від якості числового наближення. Тим самим гарантується єдиний глобальний мінімум і детермінований розв'язок на кожному такті керування.

6. Вибір гіперпараметрів

Гіперпараметри (σ, λ) визначають мінімізацією аналітичної оцінки перехресної перевірки з виключенням по одному:

$$E_{\text{Loo}}(\sigma, \lambda) = \sqrt{\left((1/n) \cdot \sum ((y_i - f^*(u_i))/(1 - H_{ii}))^2 \right)}, \quad (6)$$

де $H = K(K + \lambda I)^{-1}$ — матриця згладжування. Перебір виконують за сітковою схемою (10×10 значень). Перевага аналітичної оцінки (6) перед k -кратною перевіркою полягає у відсутності оптимістичного зміщення для часових рядів та у меншій дисперсії оцінки, оскільки використовуються всі $n - 1$ точок.

7. Критерії приймання моделі

Навчену модель приймають за виконання таких умов:

- позитивна визначеність матриці Грама: $\lambda_{\min}(\mathbf{K}) > 0$;
- похибка на тестовій вибірці узгоджена з рівнем шуму: $\text{RMSE}_{\text{test}} \approx (1,0-1,5) \cdot \sigma_{\eta}$;
- узгодженість тестової похибки з LOO-оцінкою: $|\text{RMSE}_{\text{test}} - E_{\text{LOO}}| / E_{\text{LOO}} < 10\%$;
- перевірка градієнта: відносне відхилення аналітичного градієнта від числового $< 10^{-6}$.

8. Приклад застосування (барабанний сепаратор ПБМ-90/250)

Для сепаратора ПБМ-90/250 за паспортними діапазонами ($B = 0,08-0,18$ Тл; $\rho = 1200-1600$ кг/м³; $Q = 200-600$ м³/год) і вибіркою $n = 500$ отримано: оптимальна ширина ядра σ^* у межах $[0,3; 1,0]$ нормованих одиниць; параметр регуляризації λ^* у межах $[0,04; 0,11]$, узгоджений із рівнем шуму $\sigma_{\eta} \approx 0,1$. Результати наведено у таблиці 2.

Таблиця 2 — Показники навченої моделі

Показник	β_{Fe}	ε
RMSE на тестовій вибірці, норм. од.	0,07–0,10	0,09–0,12
Час обчислення прогнозу	$O(n)$	$O(n)$
Час обчислення градієнта ($n = 500$)	$\approx 0,13$ мс	$\approx 0,13$ мс

Прискорення обчислення градієнта відносно числового методу — у 6 разів; строга опуклість задачі квадратичного програмування забезпечується аналітично.

9. Технологічний результат для збагачувальної фабрики

Застосування побудованої моделі у контурі предиктивного керування створює передумови для отримання збагачувальною фабрикою таких технологічних результатів:

- адекватне прогнозування показників сепарації у всьому робочому діапазоні — регулятор діє на основі правильної картини об'єкта, а не лінійного наближення, похибка якого сягає 12–18 %;
- виконання розрахунку керуючого впливу у реальному часі з великим запасом (повний цикл ≈ 3 мс при такті 60 с) — своєчасне формування впливів гарантовано;
- основа для стабілізації вмісту заліза в концентраті β_{Fe} на рівні середньоквадратичної похибки 0,5–0,7 % проти 1,2–1,5 % за типового регулювання;
- повторне використання однієї моделі обома каналами якості (β_{Fe} , ϵ) без переідентифікації при зміні робочої точки в межах домену.

10. Межі застосовності

Методика застосовна до гладких (класу C^∞) ядерних моделей; для негладких ядер вираз (4) не діє безпосередньо.

Діапазони навчальної вибірки мають охоплювати весь робочий домен об'єкта; робота за межами домену є екстраполяцією і потребує переідентифікації.

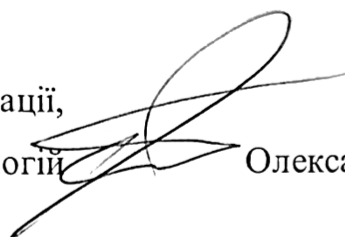
Рекомендований обсяг вибірки $n = 500\text{--}1500$; за більших n слід контролювати час навчання $O(n^3)$.

Список використаних джерел

1. Schölkopf B., Smola A. J. *Learning with Kernels: Support Vector Machines, Regularization, Optimization, and Beyond*. — Cambridge, MA: MIT Press, 2002. — 626 p.
2. Rasmussen C. E., Williams C. K. I. *Gaussian Processes for Machine Learning*. — Cambridge, MA: MIT Press, 2006. — 248 p.
3. Rawlings J. B., Mayne D. Q., Diehl M. M. *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design*. — 2nd ed. — Madison: Nob Hill Publishing, 2017.

Методику розробив:

аспірант кафедри автоматизації,
комп'ютерних наук і технологій



Олександр ВОЛОВЕЦЬКИЙ

Науковий керівник:

канд. техн. наук, доцент,
доцент кафедри автоматизації,
комп'ютерних наук і технологій



Віталій ТРОНЬ

Погоджено:

канд. техн. наук, доцент,
завідувач кафедри автоматизації,
комп'ютерних наук і технологій



Сергій РУБАН

ДОДАТОК Е

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи

Криворізького національного
університету



Дмитро БРОВКО

» 04 2026 р.

**МЕТОДИКА НАЛАШТУВАННЯ МАТРИЦІ ШТРАФНИХ ВАГ
ПРЕДИКТИВНОГО РЕГУЛЯТОРА ЗА УМОВОЮ
САМОЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КОРЕКТНОСТІ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ**

МЕТОДИКА НАЛАШТУВАННЯ МАТРИЦІ ШТРАФНИХ ВАГ ПРЕДИКТИВНОГО РЕГУЛЯТОРА ЗА УМОВОЮ САМОЗАБЕЗПЕЧЕННЯ КОРЕКТНОСТІ ЛІНЕАРИЗАЦІЇ

Перелік умовних позначень

- $u, \Delta u$ — вектор керуючих впливів та його приріст за один такт;
- $\Delta u_{\max}$ — максимально допустимий приріст по каналу керування;
- σ — ширина радіально-базисного ядра прогновної моделі (нормовані одиниці);
- $s = \|\Delta u\|/\sigma$ — нормована норма приросту керування;
- C_{curv} — безрозмірна кривизна нормованої моделі у робочій точці;
- e_{lin} — похибка лінеаризації (залишок Тейлора другого порядку);
- $\delta_{\max}$ — допустимий рівень похибки лінеаризації;
- R, R_0 — матриця штрафних ваг приростів керування та її базове значення;
- Q — матриця ваг відхилень виходів; H — гессіан задачі квадратичного програмування;
- $k_{\text{зап}}$ — запас безпеки, $s_{\text{роб}}/s_{\text{max}}$.

Вступ

При предиктивному керуванні об'єктом з нелінійною прогножною моделлю на кожному такті виконується локальна лінеаризація моделі навколо опорної траєкторії. Коректність лінеаризації обмежена величиною кроку керування: за надто великого кроку похибка лінеаризації зростає й може порушити збіжність та стійкість контуру. Традиційно крок обмежують зовнішнім механізмом (trust-region або коректором послідовного квадратичного програмування), що ускладнює реалізацію.

Методика встановлює спосіб налаштування матриці штрафних ваг приростів керування R , за якого похибка лінеаризації обмежується самою матрицею R нижче допустимого рівня — без зовнішнього обмежувача кроку. Той самий вибір R одночасно гарантує строгу опуклість задачі квадратичного програмування й підтримує асимптотичну стійкість замкненого контуру.

1. Налаштування матриці R як неявного регуляризатора кроку

Матрицю ваг призначають за правилом обернено-діапазонного масштабування:

$$R^0 = \text{diag}(1/\Delta u_{\max}^2, i). \quad (1)$$

Похибка лінеаризації гладкої моделі описується залишком Тейлора другого порядку:

$$E_{lin} \approx \frac{1}{2} \cdot s^2 \cdot C_{curv}, s = \|\Delta u\|/\sigma. \quad (2)$$

Штраф (1) утримує нормовану норму кроку s малою, унаслідок чого похибка e_{lin} лишається значно нижчою за допустиму $\delta_{\max}$. Матриця R виконує роль неявного регуляризатора кроку, а зовнішній trust-region не вводиться. За $R = R_0$ нормована норма кроку $s \approx 0,07\text{--}0,09$, що відповідає $e_{lin} \approx 0,1\text{--}0,3\%$ при допустимих $\delta_{\max} = 5\%$. За відсутності штрафу ($R = 0$) норма зростає до $s \approx 0,2\text{--}0,3$, а e_{lin} наближається до $2\text{--}5\%$, тобто до межі прийнятності.

2. Гарантія опуклості задачі квадратичного програмування

Строга опуклість задачі забезпечується вибором $R_0 > 0$. Гессіан задачі задовольняє нерівність:

$$H = \theta^T Q \theta + \bar{R} \geq \bar{R} > 0. \quad (3)$$

Єдиний глобальний мінімум забезпечується незалежно від конкретних значень якобіанів моделі, що створює умови для отримання детермінованого розв'язку на кожному такті керування.

3. Вихідні дані та розрахункові співвідношення

Налаштування зводиться до чотирьох вхідних величин і трьох розрахункових співвідношень. Вхідні дані: $\Delta u_{\max}$ по каналах; ширина ядра σ ; кривизна нормованої моделі C_{curv} ; допустима похибка $\delta_{\max}$ (типове значення 5 %). Розрахункові співвідношення:

$$R^0 = \text{diag}(1/\Delta u_{\max}^2, i); \quad (4)$$

$$E_{\text{lin}} = 1/2 \cdot s^2 \cdot C_{\text{curv}}, s = \|\Delta u\|/\sigma; \quad (5)$$

$$s_{\max} = \sqrt{(2 \cdot \delta_{\max}/C_{\text{curv}})}, \|\Delta u\|_{\max} = s_{\max} \cdot \sigma. \quad (6)$$

За відомими C_{curv} і $\delta_{\max}$ гранична нормована норма $s_{\max}$ визначається аналітично, а запас $k_{\text{зап}} = s_{\text{роб}}/s_{\max}$ показує, яку частку допустимого діапазону приростів використовує робочий режим.

4. Порядок виконання

1. За значеннями $\Delta u_{\max}$ сформувати матрицю $R_0 = \text{diag}(1/\Delta u_{\max}^2, i)$.
2. Оцінити кривизну C_{curv} для робочого режиму об'єкта.
3. Визначити робоче значення $s_{\text{роб}} = \|\Delta u\|/\sigma$ при $R = R_0$ (за симуляцією або експлуатаційними даними).
4. Обчислити похибку лінеаризації $e_{\text{lin}} = 1/2 \cdot s_{\text{роб}}^2 \cdot C_{\text{curv}}$.
5. Обчислити граничну норму $s_{\max} = \sqrt{(2 \cdot \delta_{\max}/C_{\text{curv}})}$ та запас $k_{\text{зап}} = s_{\text{роб}}/s_{\max}$.
6. Прийняти рішення: якщо $e_{\text{lin}} < \delta_{\max}$ із запасом — прийняти R_0 ; інакше збільшити R (наслідок — повільніше керування) або переглянути $\delta_{\max}$ і повторити з кроку 3.
7. Критерії приймання: $e_{\text{lin}} < \delta_{\max}$; запас $k_{\text{зап}}$ суттєво менший за одиницю; $N > 0$ (виконується автоматично при $R_0 > 0$).

5. Перевірка робастності налаштування

Стійкість налаштування до різких збурень перевіряють окремо: за подвоєння нормованої норми кроку ($s \rightarrow 2s$) похибка зростає вчетверо (e_{lin}

$\rightarrow 4 \cdot e_{\text{lin}}$). Налаштування вважають робастним, якщо при $s \rightarrow 2s$ зберігається $e_{\text{lin}} < \delta_{\text{max}}$. За типових значень кривизни $e_{\text{lin}} \approx 0,44\text{--}1,12\ \% < 5\ \%$.

6. Приклад застосування (барабанний сепаратор ПБМ-90/250)

Методику застосовано до сепаратора з трьома профілями сировини (магнетитова, змішана, кварцитова). За $\Delta u_{\text{max}} = (0,005\ \text{Тл}; 20\ \text{кг/м}^3; 50\ \text{м}^3/\text{год})$ матриця ваг становить $R_0 = \text{diag}(40000; 2,5 \cdot 10^{-3}; 4,0 \cdot 10^{-4})$. Для кожного профілю обчислено похибку лінеаризації, граничну норму та запас (таблиця 1).

Автоматично відпрацьовуваними каналами є p і Q ; магнітна індукція B є квазістатичним параметром (встановлюється вручну поворотним пристроєм). Обмеження приросту $\Delta B_{\text{max}} = 0,005\ \text{Тл/крок}$ стосується дорадчого значення для ручного коригування між робочими змінами, а не автоматичного керуючого впливу; відповідний елемент R_0 зберігається у трьохканальному формалізмі для повноти. По каналу B система формує лише рекомендацію оператору.

Таблиця 1 — Результати застосування методики

Профіль сировини	C_{curv}	$s_{\text{роб}}$ (при R_0)	$e_{\text{lin}}, \%$	$k_{\text{зап}}$
Магнетитова	0,45	0,07	0,11	$\approx 0,15$
Змішана	0,55	0,08	0,18	$\approx 0,19$
Кварцитова	0,70	0,09	0,28	$\approx 0,24$

Для всіх профілів $e_{\text{lin}} \approx 0,11\text{--}0,28\ \% \ll \delta_{\text{max}} = 5\ \%$; робоча точка використовує 15–24 % допустимого діапазону приростів. Перевірка робастності ($s \rightarrow 2s$) дає $e_{\text{lin}} \approx 0,44\text{--}1,12\ \% < 5\ \%$.

7. Зв'язок зі стійкістю замкненої системи

Та сама умова вибору R_0 , що дає $s \leq s_{\text{max}}$, є однією з достатніх умов асимптотичної стійкості предиктивного регулятора. Таким чином,

налаштування за методикою водночас забезпечує коректність лінеаризації та підтримує асимптотичну стійкість замкненого контуру, не вимагаючи окремого обмежувача кроку.

8. Технологічний результат для збагачувальної фабрики

Налаштування матриці R за цією методикою дозволяє сформувати такі технологічні передумови для роботи системи предиктивного керування на збагачувальній фабриці:

- плавні, неагресивні керуючі впливи (нормований крок 0,07–0,09 при допустимій межі 0,38–0,47) — зниження зносу виконавчих механізмів (насоса подачі, клапана води);
- гарантований єдиний розв'язок задачі керування на кожному такті без відмов рішувача — передумова безперебійної роботи в реальному часі;
- асимптотична стійкість замкненого контуру без окремого обмежувача кроку — відсутність автоколивань і «розгойдування» режиму;
- зменшення або усунення перерегулювання при зміні уставки β_{Fe} у межах досліджених режимів — швидкий і м'який вихід на нове завдання без перевищення регламентних меж.

9. Межі застосовності

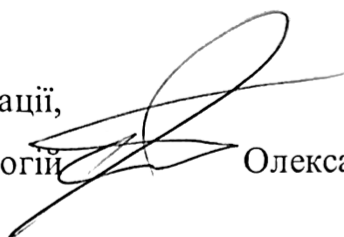
- Значення $C_{curv} = 0,45–0,70$ встановлені для трьох профілів конкретної сировини; для інших мінералогічних типів потрібна окрема оцінка кривизни.
- Метод застосовний до гладких (класу C_{∞}) прогнозних моделей; для моделей з негладкими ділянками співвідношення для e_{lin} не діє безпосередньо.
- Кривизна C_{curv} для нового об'єкта є вхідним параметром методики і підлягає оцінюванню перед застосуванням.

Список використаних джерел

1. Rawlings J. B., Mayne D. Q., Diehl M. M. *Model Predictive Control: Theory, Computation, and Design*. — 2nd ed. — Madison: Nob Hill Publishing, 2017.
2. Boyd S., Vandenberghe L. *Convex Optimization*. — Cambridge University Press, 2004. — 716 p.
3. Nocedal J., Wright S. J. *Numerical Optimization*. — 2nd ed. — New York: Springer, 2006.
4. Schölkopf B., Smola A. J. *Learning with Kernels*. — Cambridge, MA: MIT Press, 2002.

Методику розробив:

аспірант кафедри автоматизації,
комп'ютерних наук і технологій



Олександр ВОЛОВЕЦЬКИЙ

Науковий керівник:

канд. техн. наук, доцент,
доцент кафедри автоматизації,
комп'ютерних наук і технологій



Віталій ТРОНЬ

Погоджено:

канд. техн. наук, доцент,
завідувач кафедри автоматизації,
комп'ютерних наук і технологій



Сергій РУБАН

ДОДАТОК Ж

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КРИВОРІЗЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ЗАТВЕРДЖУЮ

Проректор з наукової роботи

Криворізького національного
університету



Дмитро БРОВКО

» 04 2026 р.

**МЕТОДИКА АДАПТИВНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПРОЦЕСУ
МАГНІТНОЇ СЕПАРАЦІЇ НА ОСНОВІ ТРИРІВНЕВОЇ
АРХІТЕКТУРИ З ЯДЕРНИМИ ФУНКЦІЯМИ**

МЕТОДИКА АДАПТИВНОЇ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПРОЦЕСУ МАГНІТНОЇ СЕПАРАЦІЇ НА ОСНОВІ ТРИРІВНЕВОЇ АРХІТЕКТУРИ З ЯДЕРНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Перелік умовних позначень

- KRR — ядерна гребенева регресія; SVR — регресія опорних векторів; GP — гаусів процес;
- RBF — радіально-базисне ядро; W — розмір ковзного вікна навчання;
- σ^2_{GP} — апостеріорна дисперсія прогнозу гаусового процесу;
- $R(k)$, R_0 — адаптивна та базова матриці штрафних ваг приростів керування;
- κ — коефіцієнт порога виявлення аномалій; σ_{noise} — стандартне відхилення шуму вимірювань;
- N_{jump} — кількість послідовних тактів для підтвердження стрибка режиму;
- θ_1 , θ_2 — пороги переходу між режимами консерватизму регулятора;
- RMSE — середньоквадратична похибка ідентифікації.

Вступ

Процес магнітної сепарації є нестационарним: змінюється мінеральний склад сировини (характерний час — години), гранулометрія (тижні), відбувається знос робочих органів (місяці). Фіксована прогнозна модель за таких умов втрачає адекватність, а похибка ідентифікації зростає на порядок. Однорівневі адаптивні схеми реагують однаково на справжній дрейф параметрів і на поодинокі аномальні вимірювання, що знижує якість адаптації.

Методика встановлює порядок побудови адаптивної системи ідентифікації з диференційованою реакцією на різні типи нестационарності. Система побудована як трирівнева архітектура зі спільним радіально-базисним ядром: фільтрація аномалій, оновлення прогностної моделі та оцінювання прогностної невизначеності з відповідним коригуванням консерватизму регулятора.

1. Призначення та сфера застосування

Методика призначена для підтримання адекватності прогностної моделі процесу магнітної сепарації в умовах нестационарності параметрів сировини та обладнання. Застосовна спільно з методикою побудови ядерної прогностної моделі і забезпечує її автоматичне оновлення під час експлуатації.

Магнітна індукція B входить до моделі як квазістатичний вхід (на сепараторах із постійними магнітами встановлюється вручну); по каналу B система формує лише дорадчу рекомендацію оператору. Автоматично керованими каналами є густина пульпи ρ і продуктивність Q .

2. Загальна трирівнева архітектура

Система складається з трьох функціонально розмежованих рівнів зі спільним ядром:

- Рівень 1 — фільтр аномалій на основі регресії опорних векторів (SVR);
- Рівень 2 — оновлення прогностної моделі KRR методом ковзного вікна;
- Рівень 3 — нагляд на основі гаусового процесу (GP), що оцінює прогностну невизначеність і коригує матрицю штрафних ваг регулятора.

Математична єдність архітектури полягає у спільному використанні радіально-базисного ядра й матриці Грама: апостеріорна дисперсія GP обчислюється без додаткової інверсії, повторно використовуючи факторизацію, отриману при навчанні KRR.

3. Рівень 1. Фільтрація аномальних вимірювань

Аномальність поточного вимірювання визначають за нев'язкою між вимірним і прогнозованим значеннями:

$$\Delta_k = \|y_k - f_{Svr}(u_k)\| > \varepsilon_{thr} = \kappa \cdot \sigma_{noise}. \quad (1)$$

За коефіцієнта $\kappa = 2,5$ ймовірність хибного спрацювання становить близько 1,2 %. Поодинокі аномалії (викиди, залипання) відсіюються з навчальної вибірки. Стрибкоподібну зміну режиму (а не поодинокі аномалії) підтверджують за послідовністю $N_{consec} \geq N_{jump} = 3-5$ тактів.

4. Рівень 2. Оновлення моделі методом ковзного вікна

Прогнозну модель KRR оновлюють на ковзному вікні останніх W спостережень (рекомендоване $W = 500$, що відповідає покриттю близько 8 годин роботи). Перенавчання має складність $O(W^3)$; за рахунок використання попередньо обчислених структур (теплий старт) інкрементне оновлення виконується приблизно у 5 разів швидше за первинне навчання на повній вибірці. Час оновлення значно менший за такт керування, тому модель оновлюється на кожному такті без пропусків.

5. Рівень 3. Наглядач на основі гаусового процесу

Прогнозну невизначеність оцінюють апостеріорною дисперсією гаусового процесу:

$$\sigma_{GP}^2(u *) = k(u *, u *) - k(u *)^T \cdot (K + \lambda I)^{-1} \cdot k(u *). \quad (2)$$

Значення σ_{GP}^2 лежить у межах від рівня регуляризації (повна невизначеність) до одиниці (повна невизначеність). Зростання σ_{GP}^2 сигналізує

про вихід робочої точки за межі вивченого домену. На основі σ^2_{GP} матрицю штрафних ваг приростів керування коригують:

$$R(k) = R_0 + \alpha \cdot \sigma^2_{GP} \cdot I. \quad (3)$$

Пороги переходу між режимами консерватизму задають як $\theta_1 = c_1 \cdot \lambda^*$ (рівень регуляризації) та $\theta_2 = 3 \cdot \theta_1$ (межа домену). Коефіцієнт α призначають так, щоб при $\sigma^2_{GP} = \theta_2$ додатковий член дорівнював максимальному діагональному елементу R_0 , тобто ефективна жорсткість керування на найчутливішому каналі подвоювалася. Для уникнення коливань на границі режимів застосовують гістерезис у 3–5 тактів. Тим самим за виходу робочої точки за межі навчального домену регулятор автоматично переходить у консервативніший режим.

6. Порядок виконання

1. На кожному такті отримати вимірювання й перевірити його фільтром SVR за критерієм (1).
2. Прийняті вимірювання включити у ковзне вікно; за потреби — переоновити модель KRR.
3. Обчислити апостеріорну дисперсію σ^2_{GP} за виразом (2).
4. Сформувати адаптивну матрицю $R(k)$ за виразом (3) з урахуванням порогів θ_1 , θ_2 та гістерезису.
5. Передати оновлені модель і матрицю $R(k)$ у контур предиктивного керування.

7. Очікувані показники та критерії приймання

Ефективність архітектури підтверджують зіставленням із статичною (неадаптивною) моделлю (таблиця 1).

Таблиця 1 — Показники адаптивної ідентифікації

Сценарій нестационарності	Покращення RMSE	RMSE адапт., норм. од.
Повільний дрейф складу сировини	15–20×	0,17–0,21
Зміна типу руди (магнетит → кварцит)	до 36×	0,22–0,30
Вихід за межі навчального домену	RMSE 0,5→0,22	0,22

Критерії приймання: точність ідентифікації відновлюється за 5–8 тактів після зміни режиму; показники фільтра аномалій — точність $\geq 0,90$, повнота $\geq 0,85$; похибка ідентифікації за всіх сценаріїв не перевищує допустимого для стійкого керування рівня.

8. Технологічний результат для збагачувальної фабрики

Адаптивна ідентифікація за цією методикою дозволяє підтримувати такі технологічні властивості системи керування на збагачувальній фабриці:

- збереження якості концентрату при зміні типу руди та дрейфі складу сировини без втручання оператора й без повторної ручної ідентифікації моделі;
- відсіювання аномальних вимірювань (точність фільтра $\geq 0,90$)
- поодинокі викиди датчиків не спотворюють керування;
- відновлення точності за 5–8 тактів ($\approx 5\text{–}8$ хв) після стрибкоподібної зміни режиму;
- підвищення точності ідентифікації у 15–36 разів відносно статичної моделі — утримання вмісту заліза β_{Fe} на цільовому рівні 65–68 % (не нижче регламентного мінімуму 65 %), за якого частка часу з падінням нижче мінімуму не перевищує 1 %, та підтримка підвищеного вилучення ϵ .

9. Межі застосовності

– Розмір вікна W обирають як компроміс між швидкістю адаптації та статистичною стабільністю; рекомендоване $W = 500$ відповідає покриттю близько 8 годин.

– Пороги θ_1 , θ_2 та коефіцієнт k калібрують за рівнем шуму конкретного вимірювального тракту.

– Числові показники покращення встановлені для трьох типів руди Кривбасу; для іншої сировини потрібне повторне оцінювання.

Список використаних джерел

1. Rasmussen C. E., Williams C. K. I. *Gaussian Processes for Machine Learning*. — Cambridge, MA: MIT Press, 2006. — 248 p.

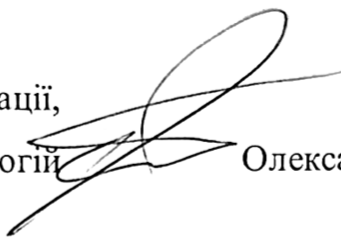
2. Schölkopf B., Smola A. J. *Learning with Kernels*. — Cambridge, MA: MIT Press, 2002. — 626 p.

3. Gama J., Žliobaitė I., Bifet A. et al. *A Survey on Concept Drift Adaptation* // ACM Computing Surveys. — 2014. — Vol. 46, No. 4.

4. IEC 62381. *Automation systems in the process industry — Factory acceptance test, site acceptance test and site integration test*.

Методику розробив:

аспірант кафедри автоматизації,
комп'ютерних наук і технологій



Олександр ВОЛОВЕЦЬКИЙ

Науковий керівник:

канд. техн. наук, доцент,
доцент кафедри автоматизації,
комп'ютерних наук і технологій



Віталій ТРОНЬ

Погоджено:

канд. техн. наук, доцент,
завідувач кафедри автоматизації,
комп'ютерних наук і технологій



Сергій РУБАН

ДОДАТОК И



**ПРИВАТНЕ АКЦІОНЕРНЕ ТОВАРИСТВО
«ПІВНІЧНИЙ ПРИЧО-ЗБАГАЧУВАЛЬНИЙ
КОМБІНАТ»**

ПРАТ «ПІВНГЗК», м. Кривий Ріг,
Тернівський район,
Дніпропетровська область, 50079, Україна
sevgok.melinvestholding.com

Тел.: +38 056 400 63 09
Факс: +38 056 400 70 62
E-mail: sevgok@metinvestholding.com

Д О В І Д К А

**про прийняття до використання методик, розроблених за результатами
дисертаційної роботи Воловецького Олександра Остаповича**

м. Кривий Ріг

Цією довідкою підтверджується, що методики, розроблені Воловецьким Олександром Остаповичем за результатами роботи над дисертаційною роботою «Предиктивне керування нелінійним процесом магнітної сепарації на основі ядерних функцій», прийнято до використання у складі автоматизованої системи керування технологічним процесом магнітної сепарації залізорудної сировини, а саме:

- 1) Методика побудови нелінійної прогнозної моделі процесу магнітної сепарації на основі ядерної регресії з аналітично обчислюваним градієнтом;
- 2) Методика налаштування матриці штрафних ваг предиктивного регулятора за умовою самозабезпечення коректності лінеаризації;
- 3) Методика адаптивної ідентифікації процесу магнітної сепарації на основі трирівневої архітектури з ядерними функціями.

Зазначені методики плануються у застосуванні при розробці алгоритмічного та програмного забезпечення системи предиктивного керування барабанними магнітними сепараторами.

Використання зазначених методик (результатів дисертаційної роботи Воловецького О. О.) дозволяє:

- підвищити стабільність вмісту заліза в концентраті β_{Fe} — зменшення середньоквадратичної похибки керування до 0,5–0,7 %;
- утримувати β_{Fe} на цільовому рівні 65–68 %, за якого частка часу з падінням вмісту заліза нижче регламентного мінімуму 65 % не перевищує 1 %;
- підвищити коефіцієнт вилучення заліза у концентрат ϵ на 1–2 п.п.;
- зберігати задані показники якості концентрату при зміні типу руди та дрейфі складу сировини без втручання оператора.

Заступник генерального директора
з інформаційних технологій



Е.К. Назіров

+380675697978
eldar.nazirov@metinvestholding.com

ДОДАТОК К


 ДИПЛОМОВА ОБЛ. ДИРЕКТОР
 з технології та якості
 АДМІНІСТРАЦІЯ ПРАТ «ЛВНГЗК»
 відділ
 Ідентифікаційний
 код 00191023
 Львів
 УКРАЇНА
 Олена БЕЛАН
 АКТ

Про розгляд дисертаційного методу прогнозування керування нелінійними процесами магнітної сепарації на основі ядерних функцій автора
 Воловецького Олександра Остаповича

Фахівцями підприємства розглянуто основні результати дисертаційної роботи на тему «Прогнозуюче керування нелінійним процесом магнітної сепарації на основі ядерних функцій».

Дисертаційне дослідження спрямоване на розв'язання науково-прикладної задачі побудови прогнозних моделей нелінійних процесів збагачення мінеральної сировини та використання таких моделей у системах прогнозного керування. У роботі обґрунтовано доцільність застосування ядерних функцій для моделювання складних нелінійних залежностей між технологічними параметрами процесу та показниками якості продукту.

Для умов збагачувального виробництва практичний інтерес становить можливість використання запропонованого підходу під час аналізу взаємозв'язку між параметрами технологічного режиму, властивостями вихідної сировини та результатами розділення. Зазначений напрям є важливим для підвищення обґрунтованості вибору керуючих дій і подальшого вдосконалення алгоритмів керування в автоматизованих системах керування технологічними процесами.

За результатами розгляду встановлено, що окремі положення дисертаційної роботи мають практичну значущість для подальшого розвитку науково-технічних підходів до моделювання та керування процесами збагачення мінеральної сировини.

До таких положень належать:

- використання нелінійних прогнозних моделей для опису складних технологічних залежностей;
- застосування ядерних функцій для підвищення гнучкості моделей технологічного процесу;
- врахування можливості подальшого використання прогнозних моделей у задачах оптимізації режимів роботи технологічного обладнання;
- орієнтація результатів моделювання на практичні задачі АСУ ТП.

Результати дослідження можуть бути враховані у подальших роботах, спрямованих на підвищення ефективності керування нелінійними технологічними процесами збагачувального виробництва.

Головний збагачувач
ПРАТ «ЛВНГЗК»



Свєтєн БЕЗСМЕРТНИЙ